Nom : . . . . **Prénom :** . . . . Classe :. . . . . .

CORRECTION DE L'NTERROGATION N°2

On prendra soin de coller le sujet sur la copie. La note tiendra compte de la qualité de la rédaction et de l'application.

Exercice 1. (6 points)

1. On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par :

$$u_n = -6n^4 - 5n^2 + n + 1$$

Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

Pour tout entier naturel on a :

$$u_n = n^4\left(\frac{-6n^4}{n^4} - \frac{5n^2}{n^4} + \frac{n}{n^4} + \frac{1}{n^4}\right) = n^4\left(-6 - \frac{5}{n^2} + \frac{1}{n^3} + \frac{1}{n^4}\right)$$

Puisque $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{5}{n^2} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n^3} = \lim\limits_{n\to+\infty}$
$dfrac1n^4 = 0$, par conséquent :

$$\lim_{n\to+\infty} -6 - \frac{5}{n^2} + \frac{1}{n^3} + \frac{1}{n^4} = -6$$

De plus

$$\lim_{n\to+\infty} n^4 = +\infty$$

Ainsi par produit on obtient :

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = -6$$

2. On considère la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par :

$$v_n = \frac{n-1}{n^2+1}$$

Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$. Lorsque n tend vers $+\infty$ on a une forme indéterminée du type « $\dfrac{+\infty}{+\infty}$ » ...

Or :

$$v_n = \frac{n\left(1 - \dfrac{1}{n}\right)}{n^2\left(1 + \dfrac{1}{n^2}\right)} = \frac{1}{n} \times \frac{1 - \dfrac{1}{n}}{1 + \dfrac{1}{n^2}}$$

D'une part $\lim\limits_{n\to+\infty} 1 - \dfrac{1}{n} = \lim\limits_{n\to+\infty} 1 + \dfrac{1}{n^2} = 1$ et donc

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1 - \dfrac{1}{n}}{1 + \dfrac{1}{n^2}} = 1$$

D'autre part $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n} = 0$,

Au final par produit on obtient :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \times \frac{1 - \dfrac{1}{n}}{1 + \dfrac{1}{n^2}} = 0 \times 1 = 0$$

La suite (v_n) converge donc vers 0.

Exercice 2. (4 points)

Soit (w_n) une suite définie par $w_0 = 1$ et $w_{n+1} = \sqrt{2w_n + 2}$ pour tout entier naturel n.

1. Démontrer par récurrence la propriété $\mathscr{P}(n) : 0 < w_n < w_{n+1} < 3$

Initialisation : pour $n = 0$ on a :
$w_0 = 1$ et $w_1 = \sqrt{2 \times 1 + 2} = 2$ et donc on a bien $0 < 1 < 2 < 3$.
$\mathscr{P}$ est donc vraie pour $n = 0$.
Hérédité : Montrons que si $0 < w_n < w_{n+1} < 3$ alors $0 < w_{n+1} < w_{n+2} < 3$.
Puisque $0 < w_n < w_{n+1} < 3$, en multipliant par 2 on obtient :

$$0 < 2w_n < 2 < w_{n+1} < 6$$

puis en additionnant 2 on obtient :

$$2 < 2w_n + 2 < 2w_{n+1} + 2 < 8$$

, puis comme la fonction racine carrée est strictement croissante sur $[2;8]$ on a :

$$\sqrt{2} < \sqrt{2w_{n+1}+2} < \sqrt{2w_{n+1}+2} < \sqrt{8}$$

C'est-à-dire :

$$0 < \sqrt{2} < w_{n+1} < w_{n+2} < \sqrt{8} < 3$$

$\mathscr{P}$ est donc héréditaire.

Conclusion : $\mathscr{P}$ étant héréditaire et initialisée à partir de $n = 0$, elle est toujours vraie.

2. En déduire que la suite (w_n) converge. *On ne demande pas de déterminer sa limite !!*

On vient de démontrer que $w_n < w_{n+1}$ pour tout entier naturel n, donc (w_n) est strictement croissante et on vient de démontrer que $w_n < 3$ pour tout entier naturel n.

Par conséquent (w_n) est une suite croissante et majorée par 3, donc elle converge vers un réel $\ell \leq 3$.

Nom : .... **Prénom :** .... Classe :......

CORRECTION DE L'INTERROGATION N°2

On prendra soin de coller le sujet sur la copie. La note tiendra compte de la qualité de la rédaction et de l'application.

Exercice 1. (4 points)

Soit (w_n) une suite définie par $w_0 = 7$ et $w_{n+1} = \sqrt{2+w_n}$ pour tout entier naturel n.

1. Démontrer par récurrence la propriété $\mathscr{P}(n) : 0 < w_{n+1} < w_n \leq 7$

   Initialisation : pour $n = 0$ nous devons vérifier que $0 < w_1 < w_0 \leq 7$.
   $w_0 = 7$ et donc $w_1 = \sqrt{2+w_0} = \sqrt{2+7} = \sqrt{9} = 3$.
   On constate bien que $0 < 3 < 7 \leq 7$, par conséquent $\mathscr{P}$ est vraie pour $n = 0$.
   Hérédité : Montrons que si $0 < w_{n+1} < w_n \leq 7$ alors $0 < w_{n+2} < w_{n+1} \leq 7$

$$\begin{aligned} & 0 < w_{n+1} < w_n \leq 7 \\ \Longleftrightarrow \quad & 2 < 2 + w_{n+1} < 2 + w_n \leq 9 \\ \Longleftrightarrow \quad & \sqrt{2} < \sqrt{2+w_{n+1}} < \sqrt{2+w_n} \leq \sqrt{9} \\ \Longleftrightarrow \quad & 0 < \sqrt{2} < w_{n+2} < w_{n+1} \leq 3 \leq 7 \end{aligned}$$

   $\mathscr{P}$ est donc héréditaire (ce qui signifie que si elle est vraie au rang n alors elle est vraie au rang $n+1$).
   Conclusion : Nous avons démontré par récurrence que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 < w_{n+1} < w_n \leq 7$$

2. En déduire que la suite (w_n) converge. *On ne demande pas de déterminer sa limite !!*

   D'après la question précédente, pour tout entier naturel n $w_{n+1} < w_n$ ce qui prouve que (w_n) est strictement décroissante.
   De plus, toujours d'après la question précédente $0 < w_n$ pour tout entier naturel n autrement dit (w_n) est minorée par 0.
   Comme toute suite décroissante et minorée la suite (w_n) converge vers un réel ℓ qui a la particularité d'être supérieur ou égal à 0.

Exercice 2. (6 points)

1. On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par :

$$u_n = 6n^3 - 5n^2 + n + 1$$

   Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

   En l'état actuel il s'agit d'une forme indéterminée du type « $\infty - \infty$ », modifions donc l'expression de u_n pour lever l'indétermination :

$$u_n = n^3\left(\frac{6n^3}{n^3} - \frac{5n^2}{n^3} + \frac{n}{n^3} + \frac{1}{n^3}\right) = n^3\left(6 - \frac{5}{n} + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^3}\right)$$

   Du fait que $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n^3} = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n^2} = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{5}{n} = 0$ il suit que :

$$\lim_{n\to+\infty} 6 - \frac{5}{n} + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^3} = 6$$

   De plus

$$\lim_{n\to+\infty} n^3 = +\infty$$

   puis par multiplication on en déduit que :

$$\lim_{n\to+\infty} n^3\left(6 - \frac{5}{n} + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^3}\right) = +\infty \Longleftrightarrow \lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$$

2. On considère la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par :

$$v_n = \frac{3n^2 - 5}{2n^2 + 7}$$

   Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$.

En l'état actuel il s'agit d'une forme indéterminée du type « $\dfrac{\infty}{\infty}$ » , modifions donc l'expression de v_n pour lever l'indétermination :

$$v_n = \frac{n^2\left(\frac{3n^2}{n^2} - \frac{5}{n^2}\right)}{n^2\left(\frac{2n^2}{n^2} + \frac{7}{n^2}\right)} = \frac{3 - \frac{5}{n^2}}{2 + \frac{7}{n^2}}$$

Enfin comme $\lim\limits_{n\to+\infty} 3 - \dfrac{5}{n^2} = 3$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} 2 + \dfrac{7}{n^2} = 2$, on a par quotient :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{3 - \frac{5}{n^2}}{2 + \frac{7}{n^2}} = \frac{3}{2} \Longleftrightarrow \lim_{n\to+\infty} v_n = \frac{3}{2}$$