On prendra soin de coller le sujet sur la copie. La note tiendra compte de la qualité de la rédaction et de l'application. Une réponse même incomplète sera prise en compte dans l'évaluation.

Exercice 1. (6 points)

On considère l'équation (E) suivante :

$$x^3+1=0$$

1. Vérifier que -1 est solution de (E).
   Si $x=-1$ on a $(-1)^3+1=-1+1=0$ donc -1 est bien solution de l'équation (E).
2. Démontrer que pour tout réel x on a :
   $$x^3+1=(x+1)(x^2-x+1)$$
   Pour tout réel x on a
   $$(x+1)(x^2-x+1)=x^3-x^2+x+x^2-x+1=x^3+1$$
3. Déterminer les racines de x^2-x+1.
   $\Delta=b^2-4ac=(-1)^2-4\times1\times1=1-4=-3<0$, par conséquent le trinome x^2-x+1 n'admet pas de racine.
4. Résoudre l'équation (E) dans $\mathbb{R}$.
   $$x^3+1=0 \iff (x+1)(x^2-x+1)=0$$
   ce qui équivaut à (produit nul) :
   $$x+1=0 \quad \text{ou} \quad x^2-x+1=0$$
   ce qui équivaut à :
   $$x=-1$$
   puisque l'équation $x^2-x+1=0$ n'admet pas de solution.
   Ainsi l'ensemble des solutions de l'équation (E) est :
   $$\mathscr{S}=\{-1\}$$

Exercice 2. (4 points)

On considère l'équation (E) :

$$7x^2+2x+1=bx$$

où b est un nombre réel.

1. Dresser le tableau de signe de l'expression $b^2-4b-24$ en fonction des valeurs de b.
   On calcule le discriminant :
   $$\Delta=(-4)^2-4\times1\times(-24)=16+96=112$$
   Ainsi le trinome admet deux racines que voici :
   $$x_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{4-\sqrt{112}}{2}=2-\sqrt{28}=2-2\sqrt{7} \qquad \text{ou} \qquad x_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{4+\sqrt{112}}{2}=2+2\sqrt{7}$$
   d'où :

b	$-\infty$		$2-2\sqrt{7}$		$2+2\sqrt{7}$		$+\infty$
$b^2-4b-24$		$+$	0	$-$	0	$+$	

2. Déterminer les valeurs de b pour lesquelles l'équation (E) admet des solutions.
   On cherche à savoir si l'équation $7x^2+2x+1=bx$ admet des solutions ce qui revient à résoudre :
   $$7x^2+2x+1-bx=0 \iff 7x^2+(2-b)x+1=0$$
   Cette admet des solutions si et seulement si son discriminant est positif ou nul, discriminant qui vaut :
   $$\Delta=(2-b)^2-4\times7=4-4b+b^2-28=b^2-4b-24$$
   D'après la question 1) il se trouve que $b^2-4b-24\geq0$ si et seulement si $b\in]-\infty;2-2\sqrt{7}]\cup[2+2\sqrt{7};+\infty[$

On prendra soin de coller le sujet sur la copie. La note tiendra compte de la qualité de la rédaction et de l'application. Une réponse même incomplète sera prise en compte dans l'évaluation.

Exercice 1. (6 points)

On considère l'équation (E) suivante :

$$x^3 + 2x - 3 = 0$$

1. Vérifier que 1 est solution de (E).
   Si $x = 1$ on a $1^3 + 2 \times 1 - 3 = 1 + 2 - 3 = 0$ donc 1 est bien solution de l'équation (E).
2. Démontrer que pour tout réel x on a :
   $$x^3 + 2x - 3 = (x-1)(x^2 + x + 3)$$
   Pour tout réel x on a
   $$(x-1)(x^2+x+3) = x^3 + x^2 + 3x - x^2 - x - 3 = x^3 + 2x - 3$$
3. Déterminer les racines de $x^2 + x + 3$.
   $\Delta = b^2 - 4ac = 1^2 - 4 \times 1 \times 3 = 1 - 12 = -11 < 0$, par conséquent le trinome $x^2 + x + 3$ n'admet pas de racine.
4. Résoudre l'équation (E) dans $\mathbb{R}$.
   $$x^3 + 2x - 3 = 0 \Longleftrightarrow (x-1)(x^2+x+3) = 0$$
   ce qui équivaut à (produit nul) :
   $$x - 1 = 0 \quad \text{ou} \quad x^2 + x + 3 = 0$$
   ce qui équivaut à :
   $$x = 1$$
   puisque l'équation $x^2 + x + 3 = 0$ n'admet pas de solution.
   Ainsi l'ensemble des solutions de l'équation (E) est :
   $$\mathscr{S} = \{1\}$$

Exercice 2. (4 points)

On considère l'équation (E) :

$$-5x^2 + 2x + 1 = bx$$

où b est un nombre réel.

1. Dresser le tableau de signe de l'expression $b^2 - 4b + 24$ en fonction des valeurs de b.
   On calcule le discriminant :
   $$\Delta = (-4)^2 - 4 \times 1 \times 24 = 16 - 96 = -80 < 0$$
   Par conséquent le trinome $b^2 - 4b + 24$ est de signe constant (signe de a) i.e $b^2 - 4b + 24 > 0$ ou (ce qui revient au meme :
   Ainsi le trinome admet deux racines que voici :
   $$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{4 - \sqrt{112}}{2} = 2 - \sqrt{28} = 2 - 2\sqrt{7} \qquad \text{ou} \qquad x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{4 + \sqrt{112}}{2} = 2 + 2\sqrt{7}$$
   d'où :

b	$-\infty$ $\qquad$ $+\infty$
$b^2 - 4b + 24$	$+$

2. Déterminer les valeurs de b pour lesquelles l'équation (E) admet des solutions.
   On cherche à savoir si l'équation $-5x^2 + 2x + 1 = bx$ admet des solutions ce qui revient à résoudre :
   $$-5x^2 + 2x + 1 - bx = 0 \Longleftrightarrow -5x^2 + (2-b)x + 1 = 0$$
   Cette admet des solutions si et seulement si son discriminant est positif ou nul, discriminant qui vaut :
   $$\Delta = (2-b)^2 - 4 \times (-5) = 4 - 4b + b^2 + 20 = b^2 - 4b + 24$$
   D'après la question 1) il se trouve que $b^2 - 4b + 24 \geq 0$ pour tout réel b.