∾ Devoir surveillé 4 ∾

La note tiendra compte de la qualité de la rédaction et de la clarté des raisonnements. En particulier dans l'ensemble du sujet, et pour chaque question, toute trace de recherche même incomplète, ou d'initiative même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.

Exercice 1. **(10 points)**

Une jardinerie vend de jeunes plants d'arbres qui proviennent de trois horticulteurs : 35 % des plants proviennent de l'horticulteur H_1, 25 % de l'horticulteur H_2 et le reste de l'horticulteur H_3. Chaque horticulteur livre deux catégories d'arbres : des conifères et des arbres à feuilles.

La livraison de l'horticulteur H_1 comporte 80 % de conifères alors que celle de l'horticulteur H_2 n'en comporte que 50 % et celle de l'horticulteur H_3 seulement 30 %.

Le gérant de la jardinerie choisit un arbre au hasard dans son stock.

Cet exercice est un questionnaire à choix multiple. Chaque question admet une unique bonne réponse. Chaque réponse soigneusement justifiée rapporte 2 points. En particulier, les événements, les variables aléatoires utiles seront introduit avec clarté.

1. La probabilité que l'arbre choisi soit un conifère acheté chez l'horticulteur H_3 vaut :

   (a) $0,075$ (b) $0,12$ (c) $0,15$ (d) $0,30$

   Notons C l'événement : « l'arbre choisi est un conifère » et
   - H_1 : « l'arbre choisi a été acheté chez l'horticulteur H_1 »,
   - H_2 : « l'arbre choisi a été acheté chez l'horticulteur H_2 »,
   - H_3 : « l'arbre choisi a été acheté chez l'horticulteur H_3 »,
   - C : « l'arbre choisi est un conifère »,
   - F : « l'arbre choisi est un arbre feuillu ».

   Dans ce cas,
   $$P(C \cap H_3) = P(H_3) \times P_{H_3}(C) = (1-0,35-0,25) \times 0,30 = 0,40 \times 0,30 = 0,12$$

2. La probabilité que l'arbre choisi soit un conifère vaut :

   (a) $0,3$ (b) $0,5$ (c) $0,525$ (d) $0,585$

   La probabilité que l'arbre choisi soit un conifère vaut :
   $$P(C) = P(C \cap H_1) + P(C \cap H_2) + P(C \cap H_3) = 0,35 \times 0,80 + 0,25 \times 0,50 + 0,12 = 0,525$$

3. Il constate que l'arbre choisi est un conifère. La probabilité qu'il ait été acheté chez l'horticulteur H_1 vaut :

   (a) $\frac{7}{15}$ (b) $\frac{8}{15}$ (c) $0,53$ (d) $\frac{4}{5}$

   La probabilité qu'il ait été acheté chez l'horticulteur H_1 vaut :
   $$P_C(H_1) = \frac{P(H_1 \cap C)}{P(C)} = \frac{0,35 \times 0,80}{0,525} = \frac{0,35 \times \frac{4}{5}}{0,525} = \frac{\frac{35}{100} \times \frac{4}{5}}{\frac{525}{1000}} = \frac{\frac{7}{25}}{\frac{525}{1000}} = \frac{7 \times 1000}{25 \times 525} = \frac{7 \times 25 \times 40}{25 \times 525} = \frac{7 \times 8 \times 5}{5 \times 15 \times 7} = \frac{8}{15}$$

4. On choisit au hasard un échantillon de 10 arbres dans le stock de cette jardinerie. On suppose que ce stock est suffisamment important pour que ce choix puisse être assimilé à un tirage avec remise de 10 arbres dans le stock.
   La probabilité qu'il y ait au moins 2 conifères dans l'échantillon prélevé vaut, à 10^{-3} près :

   (a) $0,276$ (b) $0,475$ (c) $0,525$ (d) $0,993$

   Notons X la variable aléatoire qui donne le nombre de conifère prélevé dans l'échantillon. Puisque le choix des 10 arbres peut être assimilé à un tirage **avec** remise, c'est comme si nous répétions 10 fois de manière identique et indépendante la même épreuve de Bernoulli de paramètre $0,525$. Par conséquent X suit une loi binomiale de paramètre 10 et $0,525$, par conséquent :
   $$P(X \geq 2) = 1-(P(X=0)+P(X=1) = 1-(0.475^{10}+\binom{10}{1}0.525 \times 0.475^9) = 1-0.475^{10}-10 \times 0.525 \times 0.475^9 \simeq 0.993$$

5. Une autre jardinerie vend et stocke de jeunes plants d'arbres. Sur les 20 arbres qu'elle possède en stock, 3 sont des conifères, on choisit au hasard 5 arbres dans le stock de cette jardinerie (sans remise). La probabilité qu'il y ait au moins 1 conifères dans l'échantillon prélevé vaut, à 10^{-3} près :

(a) $0,078$ (b) $0,556$ (c) $0,601$ (d) $0,768$

Notons Y la variable aléatoire qui donne le nombre de conifère prélevé dans cet échantillon.

$$P(Y \geq 1) = 1 - P(Y = 0) = 1 - \left(\frac{17}{20} \times \frac{16}{19} \times \frac{15}{18} \times \frac{14}{17} \times \frac{13}{16}\right) \simeq 0,601$$

Exercice 2. **Question Cactus**

Dans un sac sont rangés les n hochets d'un bébé. Celui-ci en prend au hasard p et les dispose dans son parc à jouer.
Combien de situation différente existe-t-il ?

Une réponse argumentée est attendue.

Numérotons les n hochets de ce bébé. Le bébé prend p hochets dans le sac pour les disposer dans son parc à jouer, modélisons la situation en écrivant un nombre de n chiffres constitué de 0 et de 1 de la manière suivante :

— Si le bébé a pris le hochet numéro i le i ème chiffre de notre nombre est un 1.

— Si le bébé n'a pas pris le hochet numéro i le i ème chiffre de notre nombre est un 0.

Nous cherchons le nombre de nombre à n chiffres contenant exactement p 1, ce qui revient à déterminer le nombre manière d'obtenir p succès en effectuer n épreuve de Bernoulli qui par définition vaut :

$$\binom{n}{p}$$