∽ Devoir surveillé 1 ∽
Second degré

Exercice 1. *6 points*

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = 3x^2 - 12x - 15$$

et on note $\mathscr{C}_f$ sa représentation graphique dans un repère orthonormal.

1. (a) Déterminer les solutions de l'équation $f(x) = 0$.

Il s'agit de déterminer les racines de f, calculons pour cela le discriminant Δ :

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-12)^2 - 4 \times 3 \times (-15) = 144 + 180 = 324$$

L'équation $f(x) = 0$ admet donc deux solutions, que voici :

$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{12-\sqrt{324}}{6} = \frac{12-18}{6} = -1 \quad \text{ou} \quad x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{12+\sqrt{324}}{6} = \frac{12+18}{6} = 5$$

Les solutions de l'équation $f(x) = 0$ sont alors $x = -1$ et $x = 5$.

(b) Déterminer l'abscisse du sommet S de la parabole $\mathscr{S}$. Préciser si sommet correspond à un maximum ou à un minimum puis calculer son ordonnée.

Le sommet S de la parabole $\mathscr{C}_f$ correspond à un minimum puisque $a = 3 > 0$, son abscisse est la moyenne des racines :

$$\frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{-1+5}{2} = 2$$

et son ordonnée est l'image de 2 :

$$f(2) = 3 \times 2^2 - 12 \times 2 - 15 = 12 - 24 - 15 = -27$$

Le sommet a pour coordonnée $S(2; -27)$.

(c) Dresser le tableau de variation de la fonction f.

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$3x^2 - 12x - 15$		↘	-27	↗	

2. (a) Dresser le tableau de signe de f sur $\mathbb{R}$.

x	$-\infty$		-1		5		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

(b) Résoudre l'inéquation $f(x) \geq 0$.

D'après le tableau signe précédent on observe que $f(x) \geq 0$ si et seulement si $x \in]-\infty; -1] \cup [5; +\infty[$

3. Donner la forme factorisée de $f(x)$, si c'est possible.

Puisque -1 et 5 sont des racines de f, alors :

$$f(x) = 3(x-(-1))(x-5) = 3(x+1)(x-5)$$

Exercice 2. *4 points*

1. Déterminer les racines du trinôme $x^2 - 2\sqrt{2}x + 1$

Déterminer pour cela le discriminant du trinome $x^2 - 2\sqrt{2}x + 1$:

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-2\sqrt{2})^2 - 4ac = 8 - 4 = 4$$

2. En vous aidant d'un tableau de signe, résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation :

$$\frac{x^2 - 2\sqrt{2}x + 1}{x^2 + 1} \geq 0$$

On sait que quelque soit le réel x, $x^2 \geq 0$, par conséquent $x^2+1 \geq 1$ et donc $x^2+1>0$ d'où :

x	$-\infty$		$\sqrt{2}-1$		$\sqrt{2}+1$		$+\infty$
$x^2-2\sqrt{2}x+1$		$+$	0	$-$	0	$+$	
x^2+1				$+$			
$\dfrac{x^2-2\sqrt{2}x+1}{x^2+1}$		$+$	0	$-$	0	$+$	

$\dfrac{x^2-2\sqrt{x}+1}{x^2+1} \geq 0 \iff x \in]-\infty;\sqrt{2}-1] \cup [\sqrt{2}+1;+\infty[$

Exercice 3. *3 points*

On considère le polynôme $P(x) = ax^2+bx+c$ où a, b et c désigne trois réels avec a et c sont tous deux non nuls.
Parmi les propositions suivantes, trouver celle qui est exacte et justifier votre choix.
Proposition 1 : Si a et c sont de même signe alors le polynôme P n'admet pas de racine.
Proposition 2 : Si a et c sont de signe contraire alors le polynôme P n'admet pas de racine.
Proposition 3 : Si a et c sont de signe contraire alors le polynôme P admet exactement deux racines.
Le nombre de racine de P dépend du signe de $\Delta = b^2-4ac$.
Dans le cas où a et c sont de signe contraire, le produit ac est négatif, autrement dit $ac<0$, puis en multipliant par -4 :

$$-4ac>0$$

puis ajoutant le carré de b qui comme tout carré est positif on obtient :

$$b^2-4ac>b^2 \geq 0$$

Au final si a et c sont de signe contraire alors $\Delta>0$ et le polynôme P admet exactement deux racines distinctes, ainsi la troisième proposition est vraie.

Le lecteur trouvera aisément dans les deux précédents exercices des contre exemples qui invalident les deux premières propositions.

Exercice 4. *4 points*

On considère un cube de coté x cm. On souhaite déterminer x de sorte que son volume soit égal à la somme de l'aire et du périmètre d'une de ses faces.

1. Démontrer que x est solution de l'équation (E) :

$$x^3-x^2-4x=0$$

Le volument du cube est x^2, l'aire d'une des faces du cube est x^2 et le périmètre d'une des faces du cube vaut $4x$, ainsi le volume du cube est la somme de l'aire et du périmètre d'une de ses faces si et seulement si

$$x^3 = x^2+4x \iff x^3-x^2-4x=0$$

Nous venons de démontrer que x est bien solution de (E).
Le lecteur observera qu'il n'était demandé ici de résoudre l'équation (E).

2. Résoudre l'équation (E) puis conclure quant au problème posé.

$$x^3-x^2-4x=0 \iff x(x^2-x-4)=0$$

Rappelons qu'un produit est nul si et seulement si l'un des facteurs au moins est nul, ainsi :

$$x(x^2-x-4)=0 \iff x=0 \quad \text{ou} \quad x^2-x-4=0$$

Le discriminant du trinôme x^2-x-4 vaut $\Delta = (-1)^2-4\times1\times(-4) = 17$, donc ce trinôme admet deux racines :

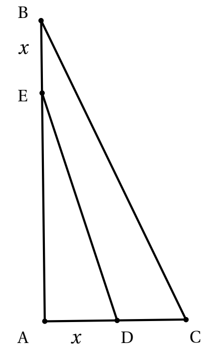
$$x_1 = \frac{1-\sqrt{17}}{2} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{1+\sqrt{17}}{2}$$

L'équation (E) admet trois solutions, $x=0$, $x=\dfrac{1-\sqrt{17}}{2}$ puis $\dfrac{1+\sqrt{17}}{2}$
La longueur cherchée étant solution de (E), elle vaut donc soit 0 (mais ceci est inenvisageable, un cube de côté 0 est-il réellement un cube ?), soit $\dfrac{1-\sqrt{17}}{2}<0$ (mais ceci est impossible, une longueur étant positive), soit $x=\dfrac{1+\sqrt{17}}{2}$ qui est donc l'unique solution du problème.

Exercice 5. *3 points*

Dans un triangle ABC rectangle en A, on place les points D et E respectivement sur [AC] et [AB] tels que AD = BE = x.

(Voir Figure ci-contre)



Déterminer x pour que l'aire du triangle ADE soit égale à la moitié de celle du triangle ABC.

Données : AB = 18 et AC = 8.

L'aire du triangle ADE vaut :

$$\frac{AD\times AE}{2}=\frac{x\times(AB-BE)}{2}=\frac{x(18-x)}{2}$$

L'aire du triangle ABC vaut :

$$\frac{AB\times AC}{2}=\frac{8\times 18}{2}=8\times 9=72$$

Par conséquent la moitié de l'aire de ABC vaut 36.

Et nous cherchons quels sont les réels x qui satisfont l'équation :

$$\frac{x(18-x)}{2}=36\Longleftrightarrow x(18-x)=72\Longleftrightarrow 18x-x^2=72\Longleftrightarrow x^2-18x+72=0$$

$\Delta=b^2-4ac=(-18)^2-4\times 1\times 72=324-288=36$, par conséquent cette équation admet deux solutions, que voici :

$$x_1=\frac{18-6}{2}=6\qquad \text{et}\qquad x_2=\frac{18+6}{2}=12$$

Exercice 6. **Bonus**

On se trouve au bord d'un gouffre très profond et pour évaluer la profondeur de celui-ci, on laisse tomber une pierre. On entend alors le bruit de l'impact de cette pierre 10 secondes après l'avoir lachée. Déterminer la profondeur du gouffre au mètre près sachant que la distance d (en mètres) parcourue par un corps en chute libre pendant un temps t (en secondes) sans vitesse initiale, est donnée par la relation $d=\frac{1}{2}gt^2$ où $g\simeq 9.8$ m.s^{-2} et la vitesse du son est de 340 m.s^{-1}

Notons d la profondeur du gouffre alors d'après l'énonce $d=\dfrac{1}{2}gt^2\Longrightarrow t^2=\dfrac{2d}{g}$

Tel est le carré du temps qu'il a fallu à la pierre pour toucher le fond du gouffre, la racine carré de ce temps est un peu inférieur à 10 secondes, puisque pour atteindre 10 secondes il a fallu le temps au son de remonter à nos oreilles.

Nous savons que $v=\dfrac{d}{t}\Longleftrightarrow t=\dfrac{d}{v}\Longrightarrow t=\dfrac{d}{340}$

Entre l'aller et le retour la distance n'a pas changé.

Ainsi les 10 secondes sont la somme entre $\sqrt{\dfrac{2d}{g}}$ et $\dfrac{d}{340}$ i.e. :

$$\sqrt{\frac{2d}{g}}=10-\frac{d}{340}$$

ce qui par élévation au carré donne :

$$\frac{2d}{g}=\left(10-\frac{d}{340}\right)^2=100-\frac{20d}{340}+\frac{d^2}{340^2}\Longleftrightarrow\frac{2d}{g}=100-\frac{1}{17}d+\frac{d^2}{340^2}$$

Multiplions le tout par $340^2g=115600g$, nous obtenons :

$$231200d=11560000g-6800gd+gd^2\Longleftrightarrow gd^2-(231200+6800g)d+11560000g=0$$

Nous reconnaissons un trinôme du second degré en d, calculons son discriminant :

$$\Delta=(231200+6800g)^2-4\times g\times 11560000g=84267776000$$

d'où :

$$d = \frac{231200 + 6800g \pm \sqrt{84267776000}}{2g}$$

Et donc $d \simeq 30006.59$ mètres ou $d \simeq 385.25$.

On trouve deux solutions mais, à savoir $d \simeq 30000$ mètres (solution absurde puisqu'il faudrait plus de 10 secondes au son pour revenir à nos oreilles du fond du gouffre, on trouve cette solution à cause de l'élévation au carré en début de résolution...) et l'autre $d \simeq 385$ mètres environ, parfaitement cohérente en revanche. En effet il faut un plus d'une seconde au son pour parcourir les 385 mètres et parvenir à notre oreille, puis il faut $t = \sqrt{\frac{2d}{g}} \simeq 8.86$ secondes pour que la pierre touche le sol.