ൿ Correction du Devoir Maison 5 ൿ
Probabilité

La note tiendra compte de la qualité de la rédaction et de l'application.

Exercice 1. ♠♠

Alice se trouve en possession de 5 clefs identiques qui lui permettent d'ouvrir son coffre secret. Malheureusement Alice sait que parmi ses 5 clefs, 2 n'ouvrent pas la porte parce qu'elles sont défectueuses mais les autres le peuvent. Elle veut alors les tester toutes, une à une. Le choix des clefs est effectué au hasard et sans remise. On appelle clef numéro x la clef utilisée au x−ème essai.

On appelle D_i l'événement : « la clef numéro i n'ouvre pas la porte. »

1. Calculer la probabilité de l'événement D_1.

$$P(D_1) = \frac{2}{5}$$

2. (a) Déterminer $P_{D_1}(D_2)$. Sachant que la première clef n'ouvre pas la porte il ne reste plus qu'une clef n'ouvrant pas la porte sur un total de 4 clefs donc :

$$P_{D_1}(D_2) = \frac{1}{4}$$

(b) En déduire la probabilité de l'événement $D_1 \cap D_2$.

Nous savons que $P_{D_1}(D_2) = \dfrac{P(D_1 \cap D_2)}{P(D_1)}$ d'où :

$$P(D_1 \cap D_2) = P(D_1) \times P_{D_1}(D_2) = \frac{2}{5} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{10}$$

On pourra, pour la suite de l'exercice, s'aider d'un arbre de probabilité.

3. Quelle est la probabilité de l'événement A : « les clefs numéros 1 et 2 ouvrent la porte et la clef numéro 3 ne l'ouvre pas » ?

$$P(A) = P(\overline{D_1} \cap \overline{D_2} \cap D_3) = P(\overline{D_1}) \times P_{\overline{D_1}}(\overline{D_2}) \times P_{\overline{D_1} \cap \overline{D_2}}(D_3) = \frac{3}{5} \times \frac{2}{4} \times \frac{2}{3} = \frac{1}{5}$$

4. Pour $1 \leq i \leq j \leq 5$, on note $B_{(i;j)}$ l'événement : « les clefs qui n'ouvrent pas la porte sont les clefs numéros i et j ».

(a) Calculer $P(B_{(2;4)})$.

$$P(B_{(2;4)}) = P(\overline{D_1} \cap D_2 \cap \overline{D_3} \cap D_4 \cap \overline{D_5}) = \frac{3}{5} \times \frac{2}{4} \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{1} = \frac{1}{10}$$

(b) Calculer $P(B_{(4;5)})$.

$$P(B_{(4;5)}) = P(\overline{D_1} \cap \overline{D_2} \cap \overline{D_3} \cap D_4 \cap D_5) = \frac{3}{5} \times \frac{2}{4} \times \frac{1}{3} \times \frac{2}{2} \times \frac{1}{1} = \frac{1}{10}$$

Autre méthode : Il est possible de raisonner autrement, ici il est évident qu'il y a autant de chance que ce soit les clefs 1 et 3 qui n'ouvrent pas la porte que les clefs 4 et 5, ainsi nous sommes dans des conditions d'équiprobabilité. Nous dénombrons le nombre total de cas de figure, il y a $\binom{5}{2} = 10$ manières d'échouer 2 fois sur 5 épreuves de Bernoulli d'où pour Pour $1 \leq i < j \leq 5$:

$$P(B_{(i;j)}) = \frac{1}{10}$$

Exercice 2. ♠♠♠

Une des épreuves du jeu télévisé Fort Boyard consiste à ouvrir un coffre contenant p mygales sur lesquelles est collé un morceau de papier. Sur deux d'entre elles, le morceau de papier contient un code (le même sur ces deux mygales) utile au candidat pour la poursuite du jeu. Pour les autres, le papier est vierge. Le candidat doit obtenir ce code en temps limité.

On précise :

— le candidat choisit au hasard une mygale dans le coffre ;

— si le papier est vierge, le candidat le pose en dehors du coffre ;

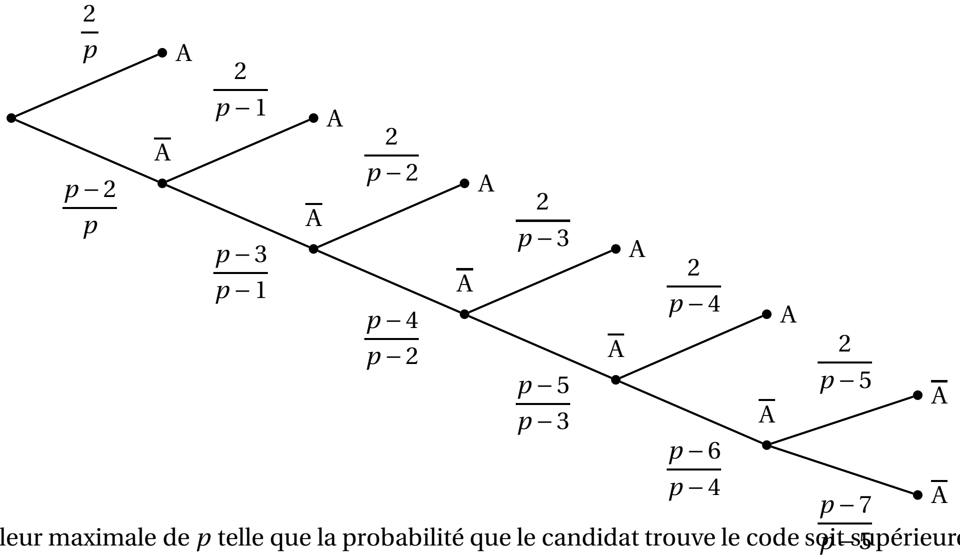
— le temps accordé permet au candidat, s'il surmonte sa peur, de faire six tentatives pour obtenir le code.

Combien faut-il au maximum de mygales pour que la probabilité que le candidat trouve le code soit supérieure à 0,60 ?

Notons A l'événement : « le candidat choisit une mygale qui contient un code »et notons p le nombre de mygale.

On obtient l'arbre suivant :

D. Zancanaro
zancanaro.math@gmail.com



On cherche la valeur maximale de p telle que la probabilité que le candidat trouve le code soit supérieure à 0,6, cela revient à déterminer la valeur maximale de p telle que la probabilité que le candidat échoue à trouver le code soit inférieure à $0,4$ ce qui se traduit par :

$$p(\text{« le candidat échoue »}) = \frac{p-2}{p} \times \frac{p-2}{p-1} \times \frac{p-4}{p-2} \times \frac{p-5}{p-3} \times \frac{p-6}{p-4} \times \frac{p-7}{p-5} \leq 0,4$$

Ce qui revient à :

$$\frac{(p-6)(p-7)}{p(p-1)} \leq 0,4 \iff p^2 - 13p + 42 \leq 0,4p(p-1) \iff 0,6p^2 - 12,6p + 42 \leq 0$$

On cherche les racines de ce trinôme : $\Delta = 12,6^2 - 4 \times 0,6 \times 42 = 57,96$ d'où :

$$x_1 = \frac{12,6 - \sqrt{57,96}}{1,2} \simeq 4,2 \qquad \text{et} \qquad x_2 = \frac{12,6 + \sqrt{57,96}}{1,2} \simeq 16,8$$

On en déduit le tableau de signe du trinôme :

p	0		x_1		x_2		$+\infty$
$0,6p^2 - 12,6p + 42$		$+$	0	$-$	0	$+$	

La valeur maximale de p pour laquelle ce trinôme est négatif ou nul est alors 16.
Conclusion :la probabilité que le candidat trouve le code sera supérieure à 0,6 pour un maximum de 16 mygales.

Exercice 3.

R.O.C

Soit P une loi de probabilité sur un univers Ω.
On considère deux événements indépendants A et B. Démontrer que $\overline{A}$ et B sont indépendants.

Deux événements A et B sont indépendants si et seulement si $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$

On souhaite donc démontrer que

$$P(\overline{A} \cap B) = P(\overline{A}) \times P(B)$$

Or, $P(B) = P(A \cap B) + P(\overline{A} \cap B)$ et puisque A et B sont indépendants on obtient :

$$P(B) = P(A) \times P(B) + P(\overline{A} \cap B) \iff P(\overline{A} \cap B) = P(B) - P(A)P(B) = P(B)(1 - P(A))$$

Or, $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$ d'où :

$$P(\overline{A} \cap B) = P(B) \times P(\overline{A})$$

Ainsi $\overline{A}$ et B sont indépendants.