ೋ Devoir Maison 1 ೋ
Généralité sur les fonctions

Exercice 1. On considère les fonctions f, g, h et k définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x)=3x^2-4x+1 \qquad g(x)=-3x+7 \qquad h(x)=\frac{1}{x^2+1} \qquad k(x)=5$$

1. Pour chacune d'entre elles calculer les images des nombres réels 0 ; $\frac{1}{2}$ et -7.

   $f(0)=3\times 0^2-4\times 0+1=1$ ainsi l'image de 0 par f est 1.
   $f(0.5)=3\times 0.5^2-4\times 0.5+1=0.75-2+1=-0.25$ ainsi l'image de 0.5 par f est -0.25.
   $f(-7)=3\times(-7)^2-4\times(-7)+1=147+28+1=176$ ainsi l'image de -7 par f est 176.
   $g(0)=-3\times 0+7=7$ ainsi l'image de 0 par g est 7.
   $g(0.5)=-3\times 0.5+7=5.5$ ainsi l'image de 0.5 par g est 5.5.
   $g(-7)=-3\times(-7)+7=21+7=28$ ainsi l'image de -7 par g est 28.
   $h(0)=\frac{1}{0^2+1}=1$ ainsi l'image de 0 par h est 1.
   $h(0.5)=\frac{1}{0.5^2+1}=\frac{1}{1,25}=\frac{1}{5/4}=\frac{4}{5}=0,8$ ainsi l'image de 0.5 par h est 0.8.
   $h(-7)=\frac{1}{(-7)^2+1}=\frac{1}{50}=0,02$ ainsi l'image de -7 par h est $0,02$.
   $k(0)=5$ ainsi l'image de 0 par k est 5.
   $k(0.5)=5$ ainsi l'image de 0.5 par k est 5.
   $k(-7)=5$ ainsi l'image de -7 par k est 5.

2. Déterminer les éventuels antécédents de 1 par f, de 3 par g, de 0.5 par h et de 7 par k.

   Antécédent de 1 par f :
   On cherche x tel que $f(x)=1 \iff 3x^2-4x+1=1 \iff 3x^2-4x=0 \iff x(3x-4)=0$
   Or, un produit est nul si et seulement si un des facteurs au moins est nul, ce qui donne :

   $$x=0 \qquad 3x-4=0 \iff x=0 \quad \text{ou} \quad x=\frac{4}{3}$$

   Ainsi 1 admet deux antécédents par f qui sont 0 et $\frac{4}{3}$.
   Antécédent de 3 par g :
   On cherche x tel que $g(x)=3 \iff -3x+7=3 \iff -3x=-4 \iff x=\frac{4}{3}$
   Ainsi 3 admet un antécédent par g qui est $\frac{4}{3}$.
   Antécédent de 0.5 par h :
   On cherche x tel que $h(x)=0.5 \iff \frac{1}{x^2+1}=0,5 \iff 1\times 1=(x^2+1)\times 0,5 \iff 1=0.5x^2+0,5 \iff 0.5=0,5x^2 \iff 1=x^2$
   Or, il existe deux nombres qui élever au carré donne 1, il s'agit de 1 et -1
   Ainsi 0.5 admet deux antécédents par h qui sont -1 et 1.
   Antécédent de 7 par k :
   On cherche x tel que $k(x)=7$
   Or, quelque soit x on sait que $k(x)=5$, ainsi il est tout à fait impossible que $k(x)=7$
   Nous en déduisons que 7 n'admet pas d'antécédent par k.

3. Dire si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses (justifier) :

   (a) $A(1;0)\in\mathscr{C}_f$;
   $A(1;0)\in\mathscr{C}_f$ si et seulement si $f(1)=0$.
   Or, $f(1)=3\times 1^2-4\times 1+1=3-4+1=0$, par conséquent :

   $$A(1;0)\in\mathscr{C}_f$$

(b) $B(1;10) \in \mathscr{C}_g$;
$B(1;10) \in \mathscr{C}_g$ si et seulement si $g(1) = 10$.
Or, $g(1) = -3 \times 1 + 7 = -3 + 7 = 4 \neq 10$, par conséquent :

$$B(1;10) \notin \mathscr{C}_g$$

(c) $C(0.5;0.8) \in \mathscr{C}_h$;
$C(0.5;0.8) \in \mathscr{C}_h$ si et seulement si $h(0.5) = 0.8$.
Or, $h(0.5) = \dfrac{1}{0.5^2+1} = \dfrac{1}{1.25} = \dfrac{1}{\frac{5}{4}} = \dfrac{4}{5} = 0,8$, par conséquent :

$$C(0.5;0.8) \in \mathscr{C}_h$$

(d) $D(1000;5) \in \mathscr{C}_k$.
$D(1000;5) \in \mathscr{C}_h$ si et seulement si $k(1000) = 5$.
Or, $k(1000) = 5$, par conséquent :

$$D(1000;5) \in \mathscr{C}_h$$

Exercice 2.

1. (a) Développer $(x-1)^2(x+2)$

$$(x-1)^2(x+2) = (x^2-2x+1)(x+2) = x^3+2x^2-2x^2-4x+x+2 = x^3-3x+2$$

(b) Résoudre alors léquation $x^3-3x+2=0$
$x^3-3x+2=0$ équivaut à $(x-1)^2(x+2)=0$
Or, un produit est nul si et seulement si un des facteurs au moins est nul, ce qui donne :

$$(x-1)^2 = 0 \qquad \text{ou} \qquad x+2=0$$

Ce qui donne :

$$x-1=0 \qquad \text{ou} \qquad x=-2$$

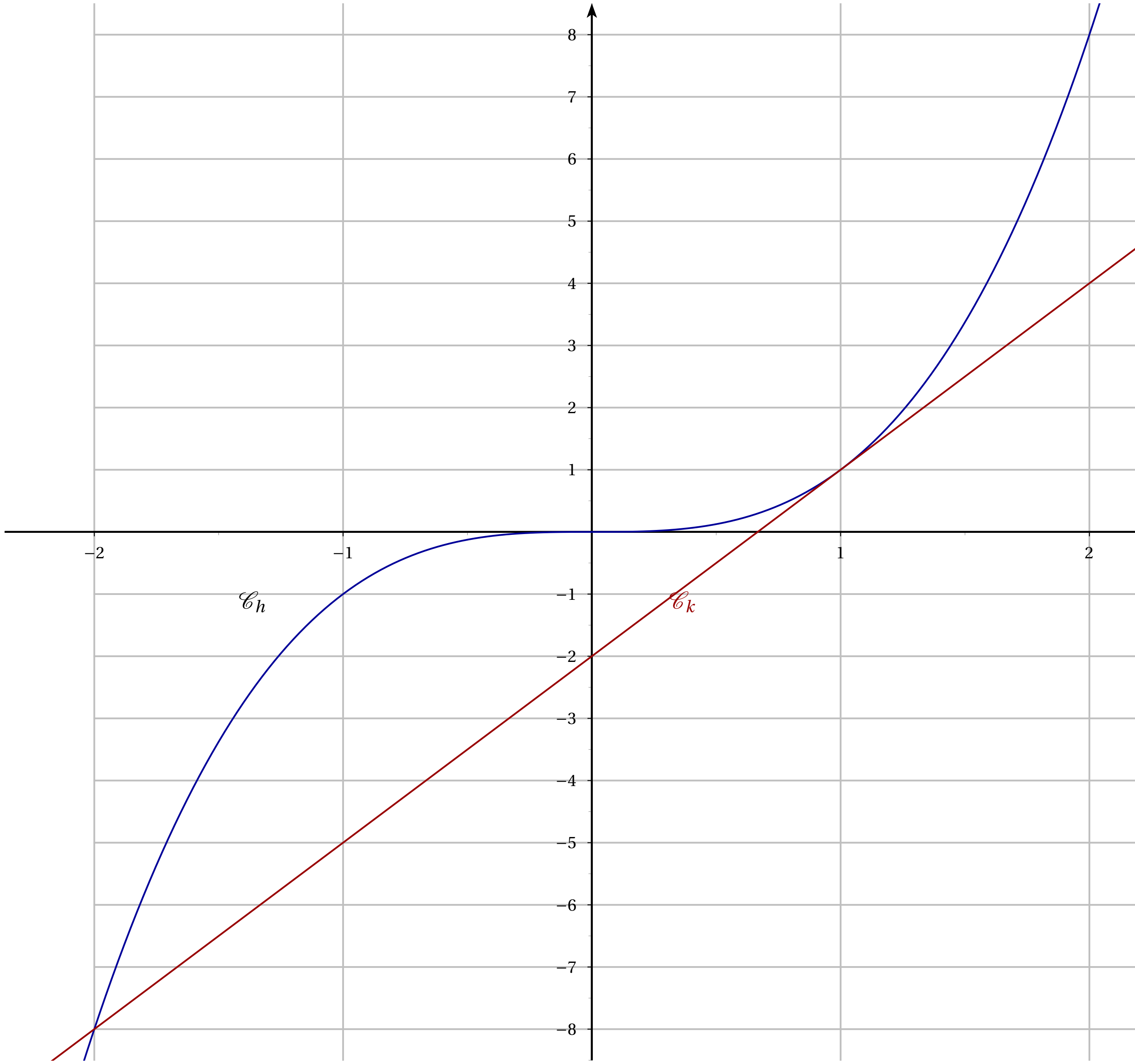
et au final :

$$x=1 \qquad \text{ou} \qquad x=-2$$

L'équation $x^3-3x+2=0$ admet donc deux solutions qui sont $x=1$ et $x=-2$.

2. On considère les fonctions h et k définies sur $\mathbb{R}$ par : $h(x) = x^3$ et $k(x) = 3x-2$

(a) Tracer soigneusement les représentations graphiques $\mathscr{C}_h$ et $\mathscr{C}_k$ de h et k sur l'intervalle $[-2;2]$.



(b) Déterminer graphiquement les coordonnées des points communs de $\mathscr{C}_h$ et $\mathscr{C}_k$.

Ces deux courbes ont deux points d'intersection, notons les A et B. Leurs coordonnées sont $A(-2;-8)$ et $B(1;1)$.

3. À l'aide de la question 1), retrouver ce résultat par le calcul.

L'abscisse des points d'intersection entre $\mathscr{C}_h$ et $\mathscr{C}_k$ est obtenu lorsque $h(x) = k(x)$.
autrement dit on cherche à résoudre :

$$x^3 = 3x - 2 \iff x^3 - 3x + 2 = 0$$

Nous savons d'après la question 1) que cette équation admet deux solutions 1 et -2.
Autrement les courbes $\mathscr{C}_h$ et $\mathscr{C}_k$ ont deux points d'intersection dont les abscisses sont 1 et -2.
On trouve leurs ordonnées en calculant l'image de 1 et de -2 en utilisant indifféremment h ou k :

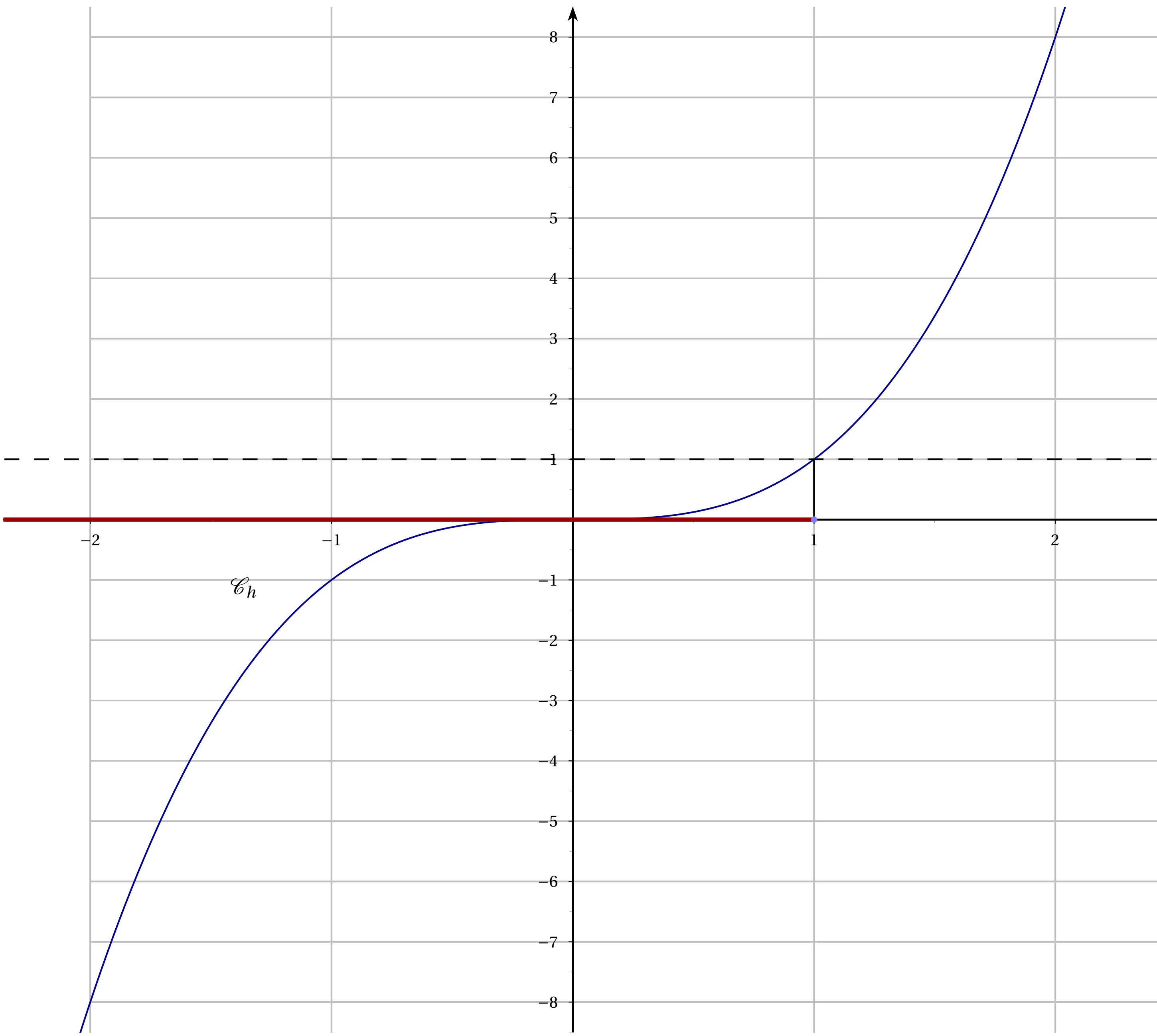
$$h(1) = 3 \times 1 - 2 = 1$$

Ainsi le point B$(1:1)$
puis

$$h(2) = 3\times(-2) - 2 = -8$$

Ainsi le point A$(-2;-8)$.

4. Résoudre graphiquement l'inéquation $h(x) \leq 1$



$h(x) \leq 1$ lorsque x se situe sur la partie rouge du graphique, ainsi l'ensemble des solutions de l'inéquation $h(x) \leq 1$ est l'intervalle :

$$]-\infty;1]$$