

I. Annales 2015

Exercice 1.

Partie A

Soit (u_n) la suite définie par son premier terme u_0 et, pour tout entier naturel n , par la relation

$$u_{n+1} = au_n + b \quad (a \text{ et } b \text{ réels non nuls tels que } a \neq 1).$$

On pose, pour tout entier naturel n , $v_n = u_n - \frac{b}{1-a}$.

1. Démontrer que, la suite (v_n) est géométrique de raison a .
2. En déduire que si a appartient à l'intervalle $] -1 ; 1[$, alors la suite (u_n) a pour limite $\frac{b}{1-a}$.

Partie B

En mars 2015, Max achète une plante verte mesurant 80 cm. On lui conseille de la tailler tous les ans, au mois de mars, en coupant un quart de sa hauteur. La plante poussera alors de 30 cm au cours des douze mois suivants.

Dès qu'il rentre chez lui, Max taille sa plante.

1. Quelle sera la hauteur de la plante en mars 2016 avant que Max ne la taille ?
2. Pour tout entier naturel n , on note h_n la hauteur de la plante, avant sa taille, en mars de l'année $(2015 + n)$.
 - (a) Justifier que, pour tout entier naturel n , $h_{n+1} = 0,75h_n + 30$.
 - (b) Conjecturer à l'aide de la calculatrice le sens de variations de la suite (h_n) .
Démontrer cette conjecture (on pourra utiliser un raisonnement par récurrence).
 - (c) La suite (h_n) est-elle convergente ? Justifier la réponse.

Exercice 2.

Partie A

On considère l'algorithme suivant :

Variables :	k et p sont des entiers naturels u est un réel
Entrée :	Demander la valeur de p
Traitement	: Affecter à u la valeur 5 Pour k variant de 1 à p Affecter à u la valeur $0,5u + 0,5(k-1) - 1,5$ Fin de pour
Sortie :	Afficher u

Faire fonctionner cet algorithme pour $p = 2$ en indiquant les valeurs des variables à chaque étape.
Quel nombre obtient-on en sortie ?

Partie B

Soit (u_n) la suite définie par son premier terme $u_0 = 5$ et, pour tout entier naturel n par

$$u_{n+1} = 0,5u_n + 0,5n - 1,5.$$

1. Modifier l'algorithme de la première partie pour obtenir en sortie toutes les valeurs de u_n pour n variant de 1 à p .
2. À l'aide de l'algorithme modifié, après avoir saisi $p = 4$, on obtient les résultats suivants :

n	1	2	3	4
u_n	1	-0,5	-0,75	-0,375

Peut-on affirmer, à partir de ces résultats, que la suite (u_n) est décroissante ?

Justifier.

3. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 3, $u_{n+1} > u_n$.
Que peut-on en déduire quant au sens de variation de la suite (u_n) ?
4. Soit (v_n) la suite définie pour tout entier naturel n par $v_n = 0,1u_n - 0,1n + 0,5$.
Démontrer que la suite (v_n) est géométrique de raison 0,5 et exprimer alors v_n en fonction de n .
5. En déduire que, pour tout entier naturel n ,

$$u_n = 10 \times 0,5^n + n - 5.$$

6. Déterminer alors la limite de la suite (u_n) .

II. Annales 2014**Exercice 3.**

Un volume constant de 2200 m³ d'eau est réparti entre deux bassins A et B.

Le bassin A refroidit une machine. Pour des raisons d'équilibre thermique on crée un courant d'eau entre les deux bassins à l'aide de pompes.

On modélise les échanges entre les deux bassins de la façon suivante :

- au départ, le bassin A contient 800 m³ d'eau et le bassin B contient 1400 m³ d'eau ;
- tous les jours, 15 % du volume d'eau présent dans le bassin B au début de la journée est transféré vers le bassin A ;
- tous les jours, 10 % du volume d'eau présent dans le bassin A au début de la journée est transféré vers le bassin B.

Pour tout entier naturel n , on note :

- a_n le volume d'eau, exprimé en m³, contenu dans le bassin A à la fin du n -ième jour de fonctionnement ;
- b_n le volume d'eau, exprimé en m³, contenu dans le bassin B à la fin du n -ième jour de fonctionnement.

On a donc $a_0 = 800$ et $b_0 = 1400$.

1. Par quelle relation entre a_n et b_n traduit-on la conservation du volume total d'eau du circuit ?
2. Justifier que, pour tout entier naturel n , $a_{n+1} = \frac{3}{4}a_n + 330$.

3. L'algorithme ci-dessous permet de déterminer la plus petite valeur de n à partir de laquelle a_n est supérieur ou égal à 1100.

Recopier cet algorithme en complétant les parties manquantes.

Variables	: n est un entier naturel a est un réel
Initialisation	: Affecter à n la valeur 0 Affecter à a la valeur 800
Traitement	: Tant que $a < 1100$, faire : Affecter à a la valeur ... Affecter à n la valeur ... Fin Tant que
Sortie	: Afficher n

4. Pour tout entier naturel n , on note $u_n = a_n - 1320$.

- (a) Montrer que la suite (u_n) est une suite géométrique dont on précisera le premier terme et la raison.
(b) Exprimer u_n en fonction de n .

En déduire que, pour tout entier naturel n , $a_n = 1320 - 520 \times \left(\frac{3}{4}\right)^n$.

5. On cherche à savoir si, un jour donné, les deux bassins peuvent avoir, au mètre cube près, le même volume d'eau.

Proposer une méthode pour répondre à ce questionnement.

Exercice 4.

On considère la suite (u_n) définie par

$$u_0 = 0 \quad \text{et, pour tout entier naturel } n, u_{n+1} = u_n + 2n + 2.$$

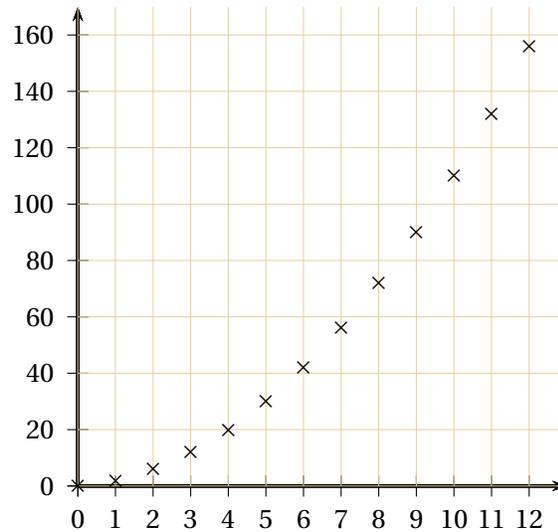
- Calculer u_1 et u_2 .
- On considère les deux algorithmes suivants :

Algorithme 1	Algorithme 2
Variables : n est un entier naturel u est un réel	Variables : n est un entier naturel u est un réel
Entrée : Saisir la valeur de n	Entrée : Saisir la valeur de n
Traitement : u prend la valeur 0 Pour i allant de 1 à n : u prend la valeur $u + 2i + 2$ Fin Pour	Traitement : u prend la valeur 0 Pour i allant de 0 à $n - 1$: u prend la valeur $u + 2i + 2$ Fin Pour
Sortie : Afficher u	Sortie : Afficher u

De ces deux algorithmes, lequel permet d'afficher en sortie la valeur de u_n , la valeur de l'entier naturel n étant entrée par l'utilisateur ?

3. À l'aide de l'algorithme, on a obtenu le tableau et le nuage de points ci-dessous où n figure en abscisse et u_n en ordonnée.

n	u_n
0	0
1	2
2	6
3	12
4	20
5	30
6	42
7	56
8	72
9	90
10	110
11	132
12	156



- (a) Quelle conjecture peut-on faire quant au sens de variation de la suite (u_n) ?
Démontrer cette conjecture.
- (b) La forme parabolique du nuage de points amène à conjecturer l'existence de trois réels a, b et c tels que, pour tout entier naturel n , $u_n = an^2 + bn + c$.
Dans le cadre de cette conjecture, trouver les valeurs de a, b et c à l'aide des informations fournies.
4. On définit, pour tout entier naturel n , la suite (v_n) par : $v_n = u_{n+1} - u_n$.
- (a) Exprimer v_n en fonction de l'entier naturel n . Quelle est la nature de la suite (v_n) ?
- (b) On définit, pour tout entier naturel n , $S_n = \sum_{k=0}^n v_k = v_0 + v_1 + \dots + v_n$.
Démontrer que, pour tout entier naturel n , $S_n = (n+1)(n+2)$.
- (c) Démontrer que, pour tout entier naturel n , $S_n = u_{n+1} - u_0$, puis exprimer u_n en fonction de n .

Exercice 5.

Soit la suite numérique (u_n) définie sur l'ensemble des entiers naturels \mathbb{N} par

$$\left\{ \begin{array}{l} u_0 = 2 \\ \text{et pour tout entier naturel } n, u_{n+1} = \frac{1}{5}u_n + 3 \times 0,5^n. \end{array} \right.$$

1. (a) Recopier et, à l'aide de la calculatrice, compléter le tableau des valeurs de la suite (u_n) approchées à 10^{-2} près :

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8
u_n	2								

- (b) D'après ce tableau, énoncer une conjecture sur le sens de variation de la suite (u_n) .
2. (a) Démontrer, par récurrence, que pour tout entier naturel n non nul on a

$$u_n \geq \frac{15}{4} \times 0,5^n.$$

- (b) En déduire que, pour tout entier naturel n non nul, $u_{n+1} - u_n \leq 0$.
- (c) Démontrer que la suite (u_n) est convergente.
3. On se propose, dans cette question de déterminer la limite de la suite (u_n) .
Soit (v_n) la suite définie sur \mathbb{N} par $v_n = u_n - 10 \times 0,5^n$.

- (a) Démontrer que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{5}$. On précisera le premier terme de la suite (v_n) .
- (b) En déduire, que pour tout entier naturel n ,

$$u_n = -8 \times \left(\frac{1}{5}\right)^n + 10 \times 0,5^n.$$

- (c) Déterminer la limite de la suite (u_n)
4. Recopier et compléter les lignes (1), (2) et (3) de l'algorithme suivant, afin qu'il affiche la plus petite valeur de n telle que $u_n \leq 0,01$.

Entrée :	n et u sont des nombres	
Initialisation :	n prend la valeur 0	
	u prend la valeur 2	
Traitement :	Tant que ...	(1)
	n prend la valeur ...	(2)
	u prend la valeur ...	(3)
	Fin Tant que	
Sortie :	Afficher n	

III. Annales 2013

Exercice 6.

Soit la suite numérique (u_n) définie sur \mathbb{N} par :

$$u_0 = 2 \quad \text{et pour tout entier naturel } n, \quad u_{n+1} = \frac{2}{3}u_n + \frac{1}{3}n + 1.$$

1. (a) Calculer u_1, u_2, u_3 et u_4 . On pourra en donner des valeurs approchées à 10^{-2} près.
- (b) Formuler une conjecture sur le sens de variation de cette suite.

2. (a) Démontrer que pour tout entier naturel n ,

$$u_n \leq n + 3.$$

- (b) Démontrer que pour tout entier naturel n ,

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{3}(n + 3 - u_n).$$

- (c) En déduire une validation de la conjecture précédente.

3. On désigne par (v_n) la suite définie sur \mathbf{N} par $v_n = u_n - n$.

- (a) Démontrer que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison $\frac{2}{3}$.

- (b) En déduire que pour tout entier naturel n ,

$$u_n = 2 \left(\frac{2}{3} \right)^n + n$$

- (c) Déterminer la limite de la suite (u_n) .

4. Pour tout entier naturel non nul n , on pose :

$$S_n = \sum_{k=0}^n u_k = u_0 + u_1 + \dots + u_n \quad \text{et} \quad T_n = \frac{S_n}{n^2}.$$

- (a) Exprimer S_n en fonction de n .

- (b) Déterminer la limite de la suite (T_n) .

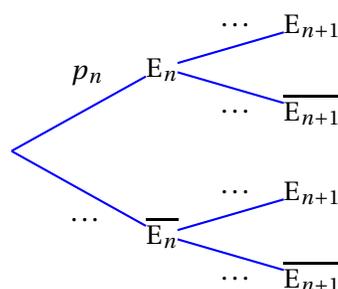
Exercice 7. Dans une entreprise, on s'intéresse à la probabilité qu'un salarié soit absent durant une période d'épidémie de grippe.

- Un salarié malade est absent
- La première semaine de travail, le salarié n'est pas malade.
- Si la semaine n le salarié n'est pas malade, il tombe malade la semaine $n + 1$ avec une probabilité égale à 0,04.
- Si la semaine n le salarié est malade, il reste malade la semaine $n + 1$ avec une probabilité égale à 0,24.

On désigne, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1, par E_n l'évènement « le salarié est absent pour cause de maladie la n -ième semaine ». On note p_n la probabilité de l'évènement E_n .

On a ainsi : $p_1 = 0$ et, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1 : $0 \leq p_n < 1$.

- (a) Déterminer la valeur de p_3 à l'aide d'un arbre de probabilité.
- (b) Sachant que le salarié a été absent pour cause de maladie la troisième semaine, déterminer la probabilité qu'il ait été aussi absent pour cause de maladie la deuxième semaine.
- (a) Recopier sur la copie et compléter l'arbre de probabilité donné ci-dessous



- (b) Montrer que, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1,
 $p_{n+1} = 0,2p_n + 0,04$.
- (c) Montrer que la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1 par $u_n = p_n - 0,05$ est une suite géométrique dont on donnera le premier terme et la raison r .
 En déduire l'expression de u_n puis de p_n en fonction de n et r .
- (d) En déduire la limite de la suite (p_n) .
- (e) On admet dans cette question que la suite (p_n) est croissante. On considère l'algorithme suivant :

Variables	K et J sont des entiers naturels, P est un nombre réel
Initialisation	P prend la valeur 0
	J prend la valeur 1
Entrée	Saisir la valeur de K
Traitement	Tant que $P < 0,05 - 10^{-K}$
	P prend la valeur $0,2 \times P + 0,04$
	J prend la valeur $J + 1$
	Fin tant que
Sortie	Afficher J

À quoi correspond l'affichage final J ?

Pourquoi est-on sûr que cet algorithme s'arrête ?

Exercice 8. On considère la suite numérique (v_n) définie pour tout entier naturel n par

$$\begin{cases} v_0 &= 1 \\ v_{n+1} &= \frac{9}{6 - v_n} \end{cases}$$

Partie A

- On souhaite écrire un algorithme affichant, pour un entier naturel n donné, tous les termes de la suite, du rang 0 au rang n .
 Parmi les trois algorithmes suivants, un seul convient. Préciser lequel en justifiant la réponse.

Algorithme N° 1	Algorithme N° 2	Algorithme N° 3
<p>Variables :</p> <p>v est un réel</p> <p>i et n sont des entiers naturels</p> <p>Début de l'algorithme :</p> <p>Lire n</p> <p>v prend la valeur 1</p> <p>Pour i variant de 1 à n faire</p> <p style="padding-left: 20px;">v prend la valeur $\frac{9}{6-v}$</p> <p>Fin pour</p> <p>Afficher v</p> <p>Fin algorithme</p>	<p>Variables :</p> <p>v est un réel</p> <p>i et n sont des entiers naturels</p> <p>Début de l'algorithme :</p> <p>Lire n</p> <p>Pour i variant de 1 à n faire</p> <p>v prend la valeur 1</p> <p style="padding-left: 20px;">Afficher v</p> <p>v prend la valeur $\frac{9}{6-v}$</p> <p>Fin pour</p> <p>Fin algorithme</p>	<p>Variables :</p> <p>v est un réel</p> <p>i et n sont des entiers naturels</p> <p>Début de l'algorithme :</p> <p>Lire n</p> <p>v prend la valeur 1</p> <p>Pour i variant de 1 à n faire</p> <p style="padding-left: 20px;">Afficher v</p> <p>v prend la valeur $\frac{9}{6-v}$</p> <p>Fin pour</p> <p>Afficher v</p> <p>Fin algorithme</p>

2. Pour $n = 10$ on obtient l'affichage suivant :

1	1,800	2,143	2,333	2,455	2,538	2,600	2,647	2,684	2,714
---	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------

Pour $n = 100$, les derniers termes affichés sont :

2,967	2,968	2,968	2,968	2,969	2,969	2,969	2,970	2,970	2,970
-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------

Quelles conjectures peut-on émettre concernant la suite (v_n) ?

3. (a) Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n , $0 < v_n < 3$.
- (b) Démontrer que, pour tout entier naturel n , $v_{n+1} - v_n = \frac{(3 - v_n)^2}{6 - v_n}$.
- La suite (v_n) est-elle monotone ?
- (c) Démontrer que la suite (v_n) est convergente.

Partie B Recherche de la limite de la suite (v_n)

On considère la suite (w_n) définie pour tout n entier naturel par

$$w_n = \frac{1}{v_n - 3}.$$

- Démontrer que (w_n) est une suite arithmétique de raison $-\frac{1}{3}$
- En déduire l'expression de (w_n) , puis celle de (v_n) en fonction de n .
- Déterminer la limite de la suite (v_n) .

Exercice 9. On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = \frac{1}{2}$ et telle que pour tout entier naturel n ,

$$u_{n+1} = \frac{3u_n}{1+2u_n}$$

1. (a) Calculer u_1 et u_2 .
(b) Démontrer, par récurrence, que pour tout entier naturel n , $0 < u_n$.
2. On admet que pour tout entier naturel n , $u_n < 1$.
(a) Démontrer que la suite (u_n) est croissante.
(b) Démontrer que la suite (u_n) converge.
3. Soit (v_n) la suite définie, pour tout entier naturel n , par $v_n = \frac{u_n}{1-u_n}$.
(a) Montrer que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison 3.
(b) Exprimer pour tout entier naturel n , v_n en fonction de n .
(c) En déduire que, pour tout entier naturel n , $u_n = \frac{3^n}{3^n+1}$.
(d) Déterminer la limite de la suite (u_n) .

Exercice 10. L'objet de cet exercice est l'étude de la suite (u_n) définie par son premier terme $u_1 = \frac{3}{2}$ et la relation de récurrence : $u_{n+1} = \frac{nu_n + 1}{2(n+1)}$.

Partie A - Algorithmique et conjectures

Pour calculer et afficher le terme u_9 de la suite, un élève propose l'algorithme ci-contre.
Il a oublié de compléter deux lignes.

Variables	n est un entier naturel u est un réel
Initialisation	Affecter à n la valeur 1 Affecter à u la valeur 1,5
Traitement	Tant que $n < 9$ Affecter à u la valeur ... Affecter à n la valeur ... Fin Tant que
Sortie	Afficher la variable u

1. Recopier et compléter les deux lignes de l'algorithme où figurent des points de suspension.
2. Comment faudrait-il modifier cet algorithme pour qu'il calcule et affiche tous les termes de la suite de u_2 jusqu'à u_9 ?
3. Avec cet algorithme modifié, on a obtenu les résultats suivants, arrondis au dix-millième :

n	1	2	3	4	5	6	...	99	100
u_n	1,5	0,625	0,375	0,2656	0,2063	0,1693	...	0,0102	0,0101

Au vu de ces résultats, conjecturer le sens de variation et la convergence de la suite (u_n) .

Partie B - Etude mathématique

On définit une suite auxiliaire (v_n) par : pour tout entier $n \geq 1$, $v_n = nu_n - 1$.

1. Montrer que la suite (v_n) est géométrique ; préciser sa raison et son premier terme.
2. En déduire que, pour tout entier naturel $n \geq 1$, on a : $u_n = \frac{1 + (0,5)^n}{n}$.
3. Déterminer la limite de la suite (u_n) .
4. Justifier que, pour tout entier $n \geq 1$, on a : $u_{n+1} - u_n = -\frac{1 + (1 + 0,5n)(0,5)^n}{n(n+1)}$.
En déduire le sens de variation de la suite (u_n) .

Partie C - Retour sur l'algorithme

En s'inspirant de la partie A, écrire un algorithme qui affiche le plus petit entier n tel que $u_n < 0,001$.

Exercice 11. Partie A

On considère la suite (u_n) définie par : $u_0 = 2$ et, pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1} = \frac{1 + 3u_n}{3 + u_n}.$$

On admet que tous les termes de cette suite sont définis et strictement positifs.

- Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n , on a : $u_n > 1$.
- Etablir que, pour tout entier naturel n , on a : $u_{n+1} - u_n = \frac{(1 - u_n)(1 + u_n)}{3 + u_n}$.
 - Déterminer le sens de variation de la suite (u_n) .
En déduire que la suite (u_n) converge.

Partie B

On considère la suite (u_n) définie par : $u_0 = 2$ et, pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1} = \frac{1 + 0,5u_n}{0,5 + u_n}.$$

On admet que tous les termes de cette suite sont définis et strictement positifs.

- On considère l'algorithme suivant :

Entrée	Soit un entier naturel non nul n
Initialisation	Affecter à u la valeur 2
Traitement et sortie	POUR i allant de 1 à n Affecter à u la valeur $\frac{1 + 0,5u}{0,5 + u}$ Afficher u
	FIN POUR

Reproduire et compléter le tableau suivant, en faisant fonctionner cet algorithme pour $n = 3$. Les valeurs de u seront arrondies au millième.

i	1	2	3
u			

- Pour $n = 12$, on a prolongé le tableau précédent et on a obtenu :

i	4	5	6	7	8	9	10	11	12
u	1,0083	0,9973	1,0009	0,9997	1,0001	0,99997	1,00001	0,999996	1,000001

Conjecturer le comportement de la suite (u_n) à l'infini.

- On considère la suite (v_n) définie, pour tout entier naturel n , par : $v_n = \frac{u_n - 1}{u_n + 1}$.
 - Démontrer que la suite (v_n) est géométrique de raison $-\frac{1}{3}$.
 - Calculer v_0 puis écrire v_n en fonction de n .
- Montrer que, pour tout entier naturel n , on a : $v_n \neq 1$.
 - montrer que, pour tout entier naturel n , on a : $u_n = \frac{1 + v_n}{1 - v_n}$.
 - Déterminer la limite de la suite (u_n) .