Correction exo semaine 1

Exo 2 : cf cours page 1 et 2.

1) $\det A = 5\times 4 - 3\times 1 = 17 \neq 0$ donc A est inversible.

2) $A^{-1} = \dfrac{1}{17}\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}$ 3) $A\times A^{-1} = \dots = I$.

Exo 3 :

1) $P^{-1} = \dfrac{1}{3\times 3 - 4\times 2}\begin{pmatrix} 3 & -4 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$

et $PDP^{-1} = \dots = A$.

2) $\forall n \geq 0$ on a donc $A^n = (PDP^{-1})^n$.

Par récurrence, mq $A^n = PD^nP^{-1}$ $\forall n \geq 0$. (cf DM 5 question 3d).

Initialisation : pour $n = 0$

$A^0 = I$

$PD^0P^{-1} = PIP^{-1} = PP^{-1} = I = A^0$ donc c'est bon.

Hérédité : mq si "$A^n = PD^nP^{-1}$" alors "$A^{n+1} = PD^{n+1}P^{-1}$"

Or $A^{n+1} = A\times A^n = A\times PD^nP^{-1}$ d'après l'HR.

$= PD\underbrace{P^{-1}\times P}_{I}D^nP^{-1}$ d'après l'initialisation

$= PDD^nP^{-1}$

$= PD^{n+1}P^{-1}$ cqfd.

Rq : on peut aussi faire $A^{n+1} = A^n \times A = \dots$.

Ccl : ...

3) Ainsi $A^n = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \frac{1}{4^n} & 0 \\ 0 & \frac{1}{(-2)^n} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} \frac{3}{4^n} & \frac{4}{(-2)^n} \\ \frac{2}{4^n} & \frac{3}{(-2)^n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{9}{4^n} + \frac{4}{(-2)^{n-1}} & \frac{-3}{4^{n-1}} + \frac{12}{(-2)^n} \\ \frac{6}{4^n} - \frac{3}{(-2)^{n-1}} & \frac{-2}{4^{n-1}} + \frac{9}{(-2)^n} \end{pmatrix}$$

Exo 4 :

1) $M(x,y,z) \in \mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_2 \cap \mathcal{P}_3 \iff \begin{cases} 2x - y + z - 7 = 0 \\ x + 2y - z + 7 = 0 \\ 2x + y - 6 = 0 \end{cases}$

$$\iff \begin{cases} 2x - y + z = 7 \\ x + 2y - z = -7 \\ 2x + y = 6 \end{cases}$$

$$\iff AX = B$$

où $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 7 \\ -7 \\ 6 \end{pmatrix}$

2) $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -2 & -2 & 3 \\ -3 & -4 & 5 \end{pmatrix}$

3) $AX = B \iff A^{-1}AX = A^{-1}B \iff X = A^{-1}B \iff X = \begin{pmatrix} -6 \\ 18 \\ 37 \end{pmatrix}$

Les 3 plans se coupent au point $M(-6; 18; 37)$.

Exo 5 :

1) $D \longleftrightarrow 3 = x$ et $\begin{cases} 7\times 3 + 3\times 17 = 72 \\ 5\times 3 + 8\times 17 = 151 \end{cases}$ donc $\begin{cases} x' \equiv 20 \ [26] \\ y' \equiv 21 \ [26] \end{cases}$

$R \longleftrightarrow 17 = y$

donc DR devient UV.

...

Ainsi DREAM est chiffré en UVCUGI.

2a) $\det A = 7\times 8 - 5\times 3 \neq 0$ donc A est inversible.

et $A^{-1} = \dfrac{1}{41}\begin{pmatrix} 8 & -3 \\ -5 & 7 \end{pmatrix}$ Ainsi $B = \ldots$

b) Pour l'existence de m : testez.

Pour l'unicité de m : supposez qu'il existe $m' \in [\![0, 25]\!]$

tq $41m' \equiv 1 \quad [26]$

alors $41m - 41m' \equiv \ldots \quad [26]$

...

expliquez pourquoi $26 \mid (m - m')$

encadrez $m - m'$ et conclure.

c) On sait que $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \ldots = A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

donc $mB\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \ldots$

$= 41m\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et établissez la congruence voulue.

d) D'après ce qui précède on cherche

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \equiv m B \quad [26].$$

donc ...

e) Pas obligé de l'écrire en Python, une procédure de déchiffrage suffit (celle que vous appliquez après)

...

$X \longrightarrow 23 = x'$ donc $\begin{cases} x \equiv 4 \times 23 + 5 \times 25 & [26] \\ y \equiv 17 \times 23 + 23 \times 25 & [26] \end{cases}$

$Z \longrightarrow 25 = y'$

$$\Rightarrow \begin{cases} x \equiv 9 & [26] \\ x \equiv 4 & [26]. \end{cases}$$

Ainsi XZ codait JE

...

On trouve à la fin JE SUIS UN AS.