

EXERCICES SUR LES MATRICES ET SUR L'ARITHMÉTIQUE RÉVISION POUR LE BAC



Exercice 1 :

Pondichéry 2014

Chaque jeune parent utilise chaque mois une seule marque de petits pots pour bébé. Trois marques X, Y et Z se partagent le marché. Soit n un entier naturel.

On note : X_n l'évènement « la marque X est utilisée le mois n »,

Y_n l'évènement « la marque Y est utilisée le mois n »,

Z_n l'évènement « la marque Z est utilisée le mois n ».

Les probabilités des évènements X_n, Y_n, Z_n sont notées respectivement x_n, y_n, z_n .

La campagne publicitaire de chaque marque fait évoluer la répartition.

Un acheteur de la marque X le mois n , a le mois suivant :

50 % de chance de rester fidèle à cette marque,

40 % de chance d'acheter la marque Y,

10 % de chance d'acheter la marque Z.

Un acheteur de la marque Y le mois n , a le mois suivant :

30 % de chance de rester fidèle à cette marque,

50 % de chance d'acheter la marque X,

20 % de chance d'acheter la marque Z.

Un acheteur de la marque Z le mois n , a le mois suivant :

70 % de chance de rester fidèle à cette marque,

10 % de chance d'acheter la marque X,

20 % de chance d'acheter la marque Y.

1. (a) Exprimer x_{n+1} en fonction de x_n, y_n et z_n .

On admet que :

$$y_{n+1} = 0,4x_n + 0,3y_n + 0,2z_n \text{ et que } z_{n+1} = 0,1x_n + 0,2y_n + 0,7z_n.$$

- (b) Exprimer z_n en fonction de x_n et y_n . En déduire l'expression de x_{n+1} et y_{n+1} en fonction de x_n et y_n .

2. On définit la suite (U_n) par $U_n = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$ pour tout entier naturel n .

On admet que, pour tout entier naturel n , $U_{n+1} = A \times U_n + B$ où $A = \begin{pmatrix} 0,4 & 0,4 \\ 0,2 & 0,1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0,1 \\ 0,2 \end{pmatrix}$.

Au début de l'étude statistique (mois de janvier 2014 : $n = 0$), on estime que $U_0 = \begin{pmatrix} 0,5 \\ 0,3 \end{pmatrix}$.

On considère l'algorithme suivant :

Variables	n et i des entiers naturels. A, B et U des matrices
Entrée et initialisation	Demander la valeur de n i prend la valeur 0 A prend la valeur $\begin{pmatrix} 0,4 & 0,4 \\ 0,2 & 0,1 \end{pmatrix}$ B prend la valeur $\begin{pmatrix} 0,1 \\ 0,2 \end{pmatrix}$ U prend la valeur $\begin{pmatrix} 0,5 \\ 0,3 \end{pmatrix}$
Traitement	Tant que $i < n$ U prend la valeur $A \times U + B$ i prend la valeur $i + 1$ Fin de Tant que
Sortie	Afficher U

- (a) Donner les résultats affichés par cet algorithme pour $n = 1$ puis pour $n = 3$.
- (b) Quelle est la probabilité d'utiliser la marque X au mois d'avril?
Dans la suite de l'exercice, on cherche à déterminer une expression de U_n en fonction de n .

On note I la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et N la matrice $I - A$.

3. On désigne par C une matrice colonne à deux lignes.

- (a) Démontrer que $C = A \times C + B$ équivaut à $N \times C = B$.

- (b) On admet que N est une matrice inversible et que $N^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{45}{23} & \frac{20}{23} \\ \frac{10}{23} & \frac{30}{23} \end{pmatrix}$.

En déduire que $C = \begin{pmatrix} \frac{17}{46} \\ \frac{7}{23} \end{pmatrix}$.

4. On note V_n la matrice telle que $V_n = U_n - C$ pour tout entier naturel n .

- (a) Montrer que, pour tout entier naturel n , $V_{n+1} = A \times V_n$.
- (b) On admet que $U_n = A^n \times (U_0 - C) + C$.
Quelles sont les probabilités d'utiliser les marques X, Y et Z au mois de mai?



Exercice 2 :

Métropole 2013

On étudie la population d'une région imaginaire. Le 1^{er} janvier 2013, cette région comptait 250000 habitants dont 70 % résidaient à la campagne et 30 % en ville.

L'examen des données statistiques recueillies au cours de plusieurs années amène à choisir de modéliser l'évolution de la population pour les années à venir de la façon suivante :

- l'effectif de la population est globalement constant,

- chaque année, 5 % de ceux qui résident en ville décident d'aller s'installer à la campagne et 1 % de ceux qui résident à la campagne choisissent d'aller habiter en ville.

Pour tout entier naturel n , on note v_n le nombre d'habitants de cette région qui résident en ville au 1^{er} janvier de l'année $(2013+n)$ et c_n le nombre de ceux qui habitent à la campagne à la même date.

1. Pour tout entier naturel n , exprimer v_{n+1} et c_{n+1} en fonction de v_n et c_n .

2. Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 0,95 & 0,01 \\ 0,05 & 0,99 \end{pmatrix}$.

On pose $X = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ où a, b sont deux réels fixés et $Y = AX$.

Déterminer, en fonction de a et b , les réels c et d tels que $Y = \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$.

Les résultats précédents permettent d'écrire que pour tout entier naturel n ,

$X_{n+1} = AX_n$ où $X_n = \begin{pmatrix} v_n \\ c_n \end{pmatrix}$. On peut donc en déduire que pour tout entier naturel n , $X_n = A^n X_0$.

3. Soient les matrices $P = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$ et $Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -5 & 1 \end{pmatrix}$.

(a) Calculer PQ et QP . En déduire la matrice P^{-1} en fonction de Q .

(b) Vérifier que la matrice $P^{-1}AP$ est une matrice diagonale D que l'on précisera.

(c) Démontrer que pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1, $A^n = PD^nP^{-1}$.

4. Les résultats des questions précédentes permettent d'établir que

$$v_n = \frac{1}{6}(1 + 5 \times 0,94^n) v_0 + \frac{1}{6}(1 - 0,94^n) c_0.$$

Quelles informations peut-on en déduire pour la répartition de la population de cette région à long terme?

Exercice 3 :

Antilles Guyanne 2013

PARTIE A.

On considère l'algorithme ci-contre :

- Qu'affiche cet algorithme quand on saisit le nombre 3?
- Qu'affiche cet algorithme quand on saisit le nombre 55?
- Pour un nombre entier saisi quelconque, que représente le résultat fourni par cet algorithme?

A et X sont des nombres entiers
 Saisir un entier positif A
 Affecter à X la valeur de A
 Tant que X supérieur ou égal à 26
 Affecter à X la valeur X - 26
 Fin du tant que
 Afficher X

PARTIE B.

On veut coder un bloc de deux lettres selon la procédure suivante (détaillée en quatre étapes) :

- Étape 1** : chaque lettre du bloc est remplacée par un entier en utilisant le tableau ci-dessous :

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25

On obtient une matrice colonne $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ où x_1 correspond à la première lettre du mot et x_2 correspond à la deuxième lettre du mot.

• **Étape 2 :** $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ est transformé en $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ tel que $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$

La matrice $C = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$ est appelée la matrice de codage.

• **Étape 3 :** $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ est transformé en $\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}$ tel que $\begin{cases} z_1 \equiv y_1 \pmod{26} & \text{avec } 0 \leq z_1 \leq 25 \\ z_2 \equiv y_2 \pmod{26} & \text{avec } 0 \leq z_2 \leq 25 \end{cases}$

• **Étape 4 :** $\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}$ est transformé en un bloc de deux lettres en utilisant le tableau de correspondance donné dans l'étape 1.

Exemple :

$$\text{RE} \rightarrow \begin{pmatrix} 17 \\ 4 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 55 \\ 93 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 3 \\ 15 \end{pmatrix} \rightarrow \text{DP}$$

Le bloc RE est donc codé en DP

1. Justifier le passage de $\begin{pmatrix} 17 \\ 4 \end{pmatrix}$ à $\begin{pmatrix} 55 \\ 93 \end{pmatrix}$ puis à $\begin{pmatrix} 3 \\ 15 \end{pmatrix}$.

2. Soient x_1, x_2, x'_1, x'_2 quatre nombres entiers compris entre 0 et 25 tels que $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{pmatrix}$ sont transformés lors du procédé

de codage en $\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}$.

(a) Montrer que $\begin{cases} 3x_1 + x_2 \equiv 3x'_1 + x'_2 \pmod{26} \\ 5x_1 + 2x_2 \equiv 5x'_1 + 2x'_2 \pmod{26} \end{cases}$

(b) En déduire que $x_1 \equiv x'_1 \pmod{26}$ et $x_2 \equiv x'_2 \pmod{26}$ puis que $x_1 = x'_1$ et $x_2 = x'_2$.

3. On souhaite trouver une méthode de décodage pour le bloc DP :

(a) Vérifier que la matrice $C' = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}$ est la matrice inverse de C.

(b) Calculer $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ tels que $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -5 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 15 \end{pmatrix}$.

(c) Calculer $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ tels que $\begin{cases} x_1 \equiv y_1 \pmod{26} & \text{avec } 0 \leq x_1 \leq 25 \\ x_2 \equiv y_2 \pmod{26} & \text{avec } 0 \leq x_2 \leq 25 \end{cases}$

(d) Quel procédé général de décodage peut-on conjecturer?

4. Dans cette question nous allons généraliser ce procédé de décodage.

On considère un bloc de deux lettres et on appelle z_1 et z_2 les deux entiers compris entre 0 et 25 associés à ces lettres à l'étape 3. On cherche à trouver deux entiers x_1 et x_2 compris entre 0 et 25 qui donnent la matrice colonne $\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}$ par les étapes 2 et 3 du procédé de codage.

Soient y'_1 et y'_2 tels que $\begin{pmatrix} y'_1 \\ y'_2 \end{pmatrix} = C' \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}$ où $C' = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}$.

Soient x_1 et x_2 , les nombres entiers tels que $\begin{cases} x_1 \equiv y'_1 \pmod{26} \text{ avec } 0 \leq x_1 \leq 25 \\ x_2 \equiv y'_2 \pmod{26} \text{ avec } 0 \leq x_2 \leq 25 \end{cases}$

Montrer que $\begin{cases} 3x_1 + x_2 \equiv z_1 \pmod{26} \\ 5x_1 + 2x_2 \equiv z_2 \pmod{26} \end{cases}$.

Conclure.

5. Décoder QC.



Exercice 4 :

Polynésie 2013

Un opérateur téléphonique A souhaite prévoir l'évolution de nombre de ses abonnés dans une grande ville par rapport à son principal concurrent B à partir de 2013.

En 2013, les opérateurs A et B ont chacun 300 milliers d'abonnés.

Pour tout entier naturel n , on note a_n le nombre d'abonnés, en milliers, de l'opérateur A la n -ième année après 2013, et b_n le nombre d'abonnés, en milliers, de l'opérateur B la n -ième année après 2013.

Ainsi, $a_0 = 300$ et $b_0 = 300$.

Des observations réalisées les années précédentes conduisent à modéliser la situation par la relation suivante :

pour tout entier naturel n , $\begin{cases} a_{n+1} = 0,7a_n + 0,2b_n + 60 \\ b_{n+1} = 0,1a_n + 0,6b_n + 70 \end{cases}$.

On considère les matrices $M = \begin{pmatrix} 0,7 & 0,2 \\ 0,1 & 0,6 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 60 \\ 70 \end{pmatrix}$.

Pour tout entier naturel n , on note $U_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$.

1. (a) Déterminer U_1 .

(b) Vérifier que, pour tout entier naturel n , $U_{n+1} = M \times U_n + P$.

2. On note I la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

(a) Calculer $(I - M) \times \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$.

(b) En déduire que la matrice $I - M$ est inversible et préciser son inverse.

(c) Déterminer la matrice U telle que $U = M \times U + P$.

3. Pour tout entier naturel, on pose $V_n = U_n - U$.

(a) Justifier que, pour tout entier naturel n , $V_{n+1} = M \times V_n$.

(b) En déduire que, pour tout entier naturel n , $V_n = M^n \times V_0$.

4. On admet que, pour tout entier naturel n ,

$$V_n = \begin{pmatrix} \frac{-100}{3} \times 0,8^n - \frac{140}{3} \times 0,5^n \\ \frac{-50}{3} \times 0,8^n + \frac{140}{3} \times 0,5^n \end{pmatrix}$$

- (a) Pour tout entier naturel n , exprimer U_n en fonction de n et en déduire la limite de la suite (a_n) .
(b) Estimer le nombre d'abonnés de l'opérateur A à long terme.