Exercice 1.

Soit f la fonction définie par :

$$f(x) = x^2 - 2x + 3$$

1. La fonction f admet-elle des valeurs interdites ? En déduire son ensemble de définition D_f.

   Le calcul de $f(x)$ ne fait intervenir ni quotient ni racine carrée, autrement dit on peut calculer $f(x)$ quelque soit la valeur de x. La fonction f n'admet pas de valeurs interdites et son ensemble de défintion est :

   $$\mathscr{D}_f = \mathbb{R}$$

2. Déterminer l'image par f de $\sqrt{2}$.

   $$f(\sqrt{2}) = \sqrt{2}^2 - 2\sqrt{2} + 3 = 2 - 2\sqrt{2} + 3 = 5 - 2\sqrt{2}$$

3. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $f(x) = 3$.

   $$f(x) = 3 \Longleftrightarrow x^2 - 2x + 3 = 3 \Longleftrightarrow x^2 - 2x = 0 \Longleftrightarrow x(x-2) = 0$$

   On reconnaît une équation produit nul, un produit est nul si et seulement si au moins un des facteurs est nul d'où :

   $$x = 0 \quad \text{ou} \quad x - 2 = 0 \Longleftrightarrow x = 0 \quad \text{ou} \quad x = 2$$

   Au final 3 admet 0 et 2 pour seuls antécédents.

4. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a $f(x) = (x-1)^2 + 2$.

   Quelque soit le nombre réel x on a :

   $$(x-1)^2 + 2 = x^2 - 2x + 1 + 2 = x^2 - 2x + 3 = f(x)$$

5. En utilisant cette dernière écriture, déterminer les éventuels antécédents de -4 par f.

   On cherche les réels x tels que $f(x) = -4$ autrement dit tels que :

   $$(x-1)^2 + 2 = -4 \Longleftrightarrow (x-1)^2 = -6$$

   Comme un carré est toujours supérieur ou égal à 0, l'équation qui précède ne peut avoir de solution et donc le nombre -4 n'a pas d'antécédent par f.

Exercice 2. On considère une fonction f définie sur l'intervalle $[-15;15]$ dont voici le tableau de variation :

x	-15		-5		0		5		10		15
$f(x)$	8	↘	2	↗	4	↘	-1	↗	10	↘	0

1. Pour chacune des propositions dire si elle est vraie ou fausse, argumentez.

   (a) *Proposition 1* : $f(1) < f(2)$.

   On raisonne sur l'intervalle $[0;5]$, la fonction f y est décroissante, par conséquent $f(1) \leq f(2)$ et non l'inverse

   (b) *Proposition 2* : Le minimum de la fonction f sur l'intervalle $[-15;0]$ est -1.

   Sur l'intervalle $[-15;0]$ la fonction f est décroissante puis croissante donc elle y admet un minimum en l'occurrence 2 atteint lorsque $x = -5$.

   (c) *Proposition 3* : $f(x) > 0$ sur l'intervalle $[-15;0]$.

   Comme on vient de le remarquer une question plus haut, le minimum de f sur $[-15;0]$ est 2 donc a fortiori $f(x) > 0$ sur cet intervalle.

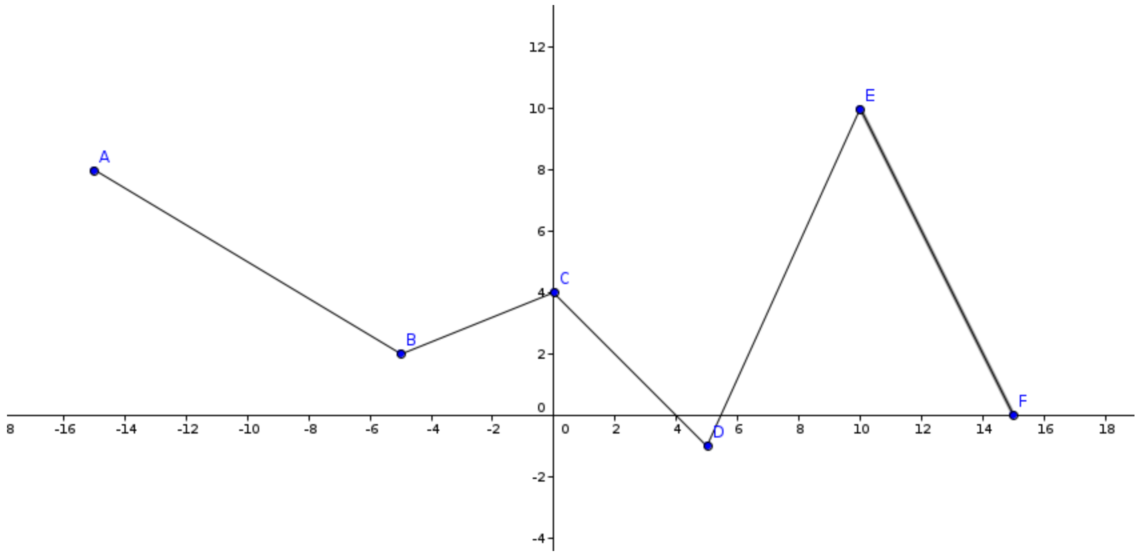
   (d) *Proposition 4* : Le maximum de la fonction f sur l'intervalle $[5;15]$ est 10.

   en effet, la fonction f présente un maximum qui vaut 10 et qui est atteint pour $x = 10$ sur cet intervalle.

(e) *Proposition 5* : On ne peut pas comparer $f(11)$ et $f(-11)$.
On sait que $2 \leq f(-11) \leq 8$ et que $0 \leq f(11 \leq 10$ ce qui ne permet pas de les comparer.

(f) *Proposition 6* :La fonction f est négative sur l'intervalle $[0;10]$.
On a par exemple $f(0) = 4$ donc f n'est pas négative sur l'intervalle $0;10]$

2. Réaliser une courbe pouvant admettre un tel tableau de variation. Votre courbe est-elle la seule que l'on puisse tracer ?



On peut tracer une infinité de représentation graphique qui respecte le tableau de variation précédent. Nous avons choisit ici de relier les points donnés par des segments, nous aurions pu choisir d'autres forme qui respectent les variations.

Exercice 3. On considère la fonction h définie pour certaines valeurs de x par :

$$h(x) = \frac{3-2x}{4x-3} + 2$$

1. Donner l'ensemble de définition de la fonction h après avoir déterminé les éventuelles valeurs interdites.
f est définie lorsque $4x - 3 \neq 0 \iff 4x \neq 3 \iff x \neq 0.75$
L'ensemble de définition de f est donc $\mathbb{R} \setminus \{0.75\}$

2. Démontrer que :

$$h(x) = \frac{6x-3}{4x-3}$$

Quelque soit le nombre réel $x \neq 0.75$ on a :

$$\frac{3-2x}{4x-3} + 2 = \frac{3-2x}{4x-3} + \frac{2(4x-3)}{4x-3} = \frac{3-2x+8x-6}{4x-3} = \frac{6x-3}{4x-3}$$

3. Préciser la nature de la fonction h et la nature de la représentation graphique $\mathscr{C}_h$.
h est le quotient de deux fonctions affines donc sa représentation graphique est une hyperbole.

4. Compléter le tableau de valeur suivant :

x	-3	-2	-1	0	$0,5$	$0,6$	$0,75$	$0,9$	1	2	4
$h(x)$	-1.4	1.36	1.29	1	0	-1	x	4	3	1.8	1.62

5. Construire dans un repère orthonormal sur $\left[-3;\frac{3}{4}\right[\cup \left]\frac{3}{4};4\right]$ la représentation graphique $\mathscr{C}_h$ de la fonction h.

6. (a) En déduire graphiquement le tableau de signe de la fonction h.

x	$-\infty$		0.5		0.75		$+\infty$
$\frac{6x-3}{4x-3}$		+	0	−	‖	+	

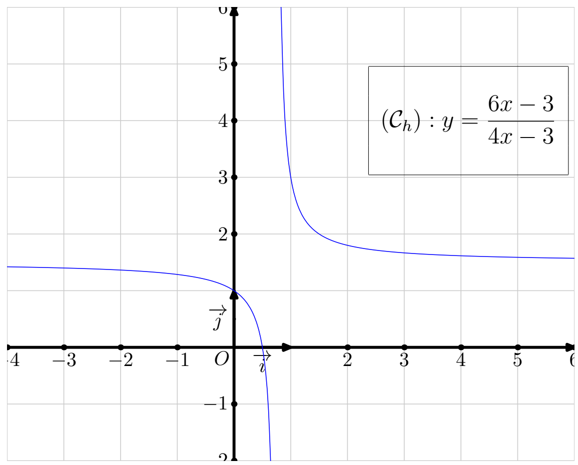


FIGURE 1 – Représentation graphique de la fonction h.

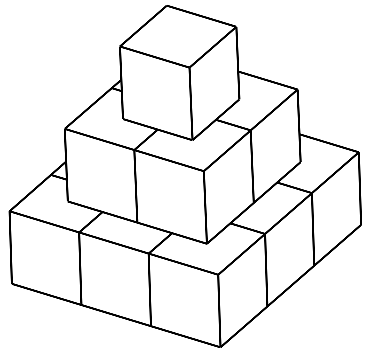
(b) Retrouver le résultat par le calcul.

x	$-\infty$		0.5		0.75		$+\infty$
$6x-3$		$-$	0		$+$		
$4x-3$			$-$		0	$+$	
$\dfrac{6x-3}{4x-3}$		$+$	0	$-$	$\Vert$	$+$	

(c) Déduire d'une des questions précédentes l'ensemble des solutions de l'équation $f(x) > 0$.

On déduit du tableau précédent que $f(x) > 0$ lorsque $x < 0.5$ ou lorsque $x > 0.75$.

Exercice 4. Le solide ci-contre est obtenu en empilant des cubes tous identiques, sans trous.



Chaque étage est plein.

1. Combien faut-il de cubes pour construire ce solide ?

   1 cube sur le premier étage, $2 \times 2 = 4$ cubes sur le suivant puis $3 \times 3 = 9$ cubes sur le troisième donne un total de 14 cubes.

2. On ajoute un étage supplémentaire. Combien faut-il de cubes pour construire ce nouveau solide ?

   Pour le quatrième étage il faut ajouter $4 \times 4 = 16$ cubes.

3. On considère l'algorithme ci-dessous :

Algorithme 1 :

n, i, s et k sont des nombres entiers naturels. Saisir n
$s := 0$
$i := 1$
Tant que $(i \leq n)$ **Faire**
    $k := i^2$
    $s := s + k$
    $i := i + 1$
Fin Tant que
Afficher s

(a) Qu'affiche cet algorithme lorsque l'utilisateur saisit $n = 5$?

Pour s'aider on pourra compléter le tableau suivant :

i	1	2	3	4	5	6
k	1	4	9	16	25	
s	$0+1=1$	5	14	30	55	

L'algorithme affiche la valeur 55

(b) Interpréter le résultat obtenu quant au problème initial.

L'algorirthme permet d'afficher le nombre de cubes nécessaire à la construction du solide à n étages.