ENSEMBLE DE DÉFINITION
GÉNÉRALITÉ SUR LES FONCTIONS

I. Valeurs interdites et ensemble de définition

Une fonction est un lien logique que l'on établit entre des quantités numériques.

Elles sont principalement définies par des formules comme la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{4}{x-3}$.

On peut réaliser le calcul de l'image de x pour presque toutes les valeurs de x mais par exemple dans le cas précédent on peut pas calculer l'image de 3, en effet :

$$f(3) = \frac{4}{3-3} = \frac{4}{0}$$

La division par zéro étant impossible le calcul de l'image de 3 est impossible.

Définition 1 :

Une valeur pour laquelle le calcul de l'image est impossible est appelée **valeur interdite.**

On trouve les valeurs interdites en appliquant les deux règles suivantes :

— On ne divise pas par zéro

— On ne prend pas racine d'un nombre strictement négatif

Il faudra donc toujours se poser les questions suivantes :
Dans l'expression de l'image,

— Y a-t-il un quotient ? Si oui, le dénominateur peut-il être nul ?

— Y a-t-il une racine ? Si oui, la quantité dont on prend la racine peut-elle être strictement négative ?

Exemple :

1. Soit f la fonction définie par $f(x) = x^2 - 3x + 1$.
   Il n'y a ni quotient, ni racine, il n'y a donc pas de valeurs interdites.
   On peut calculer l'image de x pour tout nombre réel.
2. Soit g la fonction définie par $g(x) = \dfrac{3x-1}{4-5x}$.
   Il y a un quotient, on ne peut pas diviser par 0, ce qui arrive lorsque $4-5x = 0$ et donc lorsque $x = 0,8$.
   $0,8$ est une valeur interdite.
3. Soit h la fonction définie par $h(x) = \sqrt{-x+1}$.
   Le nombre $-x+1$ doit être positif pour pouvoir en calculer la racine carrée.
   Autrement dit il faut que $-x+1 \geq 0$ et donc que $-x \geq -1$ et donc que :
   $$x < 1$$
   (l'ordre est inversé puisqu'on vient de multiplier par un nombre négatif.)
   L'ensemble des nombres supérieur ou égaux à 1 sont donc des valeurs interdites pour lesquel le calcul de l'image $h(x)$ est impossible.

Définition 2 :

L'ensemble des réels pour lesquels le calcul de l'image $f(x)$ est possible est appelé **ensemble de définition** de la fonction. On le note D_f.

Remarque : Pour trouver l'ensemble de définition il suffit de trouver l'ensemble des valeurs interdites. On peut alors écrire, en reprenant l'exemple précédent :

$$D_f = \mathbb{R} \qquad D_g = \mathbb{R}\setminus\{0.8\} =]-\infty; 0.8[\cup]0.8; +\infty[\qquad \text{et} \qquad D_h =]-\infty; 1]$$