∾ TRAVAUX DIRIGÉES 3 ∾
SUITES ET COMPLEXES

I. Annales sur les suites

Exercice 1. **Polynésie** 2016

Soit u la suite définie par $u_0 = 2$ et, pour tout entier naturel n, par $u_{n+1} = 2u_n + 2n^2 - n$.
On considère également la suite v définie, pour tout entier naturel n, par $v_n = u_n + 2n^2 + 3n + 5$.

1. Voici un extrait de feuille de tableur :

	A	B	C
1	n	u	v
2	0	2	7
3	1	4	14
4	2	9	28
5	3	24	56
6	4	63	
7			
8			
9			
10			

   Quelles formules a-t-on écrites dans les cellules C2 et B3 et copiées vers le bas pour afficher les termes des suites u et v ?
2. Déterminer, en justifiant, une expression de v_n et de u_n en fonction de n uniquement.

Exercice 2. **Amérique du sud 2016**

La suite (u_n) est définie par : $u_0 = 0$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \dfrac{1}{2 - u_n}$.

1. (a) À l'aide du calcul des premiers termes de la suite (u_n), conjecturer la forme explicite de u_n en fonction de n. Démontrer cette conjecture.
   (b) En déduire la valeur de la limite ℓ de la suite (u_n).
2. Compléter, dans l'annexe 2, l'algorithme permettant de déterminer la valeur du plus petit entier n tel que $|u_{n+1} - u_n| \leqslant 10^{-3}$.

Variables :	n, a et b sont des nombres.
Initialisation :	n prend la valeur 0, $a := 0$ et $b := 0.5$
Traitement :	Tant que $\|b - a\|$ ....
	n prend la valeur ....
	a prend la valeur ....
	b prend la valeur ....
	Fin Tant que.
Sortie :	Afficher ....

II. Effectuer des calculs algébriques avec les nombres complexes

Exercice 3.

1. Soit $x \in \mathbb{R}$, à quelle condition le nombre complexe $z = x + 2 + i(-ix + x) + 2i - 5ix$ est-il un réel ?
2. A quelle condition est-il un imaginaire pur ?

Exercice 4.

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $3z + 6i = z - 2$.
2. (a) Montrer que $z^2 - 6z + 25 = (z-3)^2 + 16$.
   (b) En déduire les solutions de l'équation $z^2 - 6z + 25 = 0$

Exercice 5. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation :

$$\frac{-i}{z+1} = 2$$

Exercice 6. Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations ci-contre. Les solutions seront données sous forme algébrique.

1. $(-1+2i)z = 3 + i$
2. $z^2 = -9$

Exercice 7. Déterminer les formes algébriques des nombres complexes donnés. Préciser, le cas échéant, s'il est réel ou imaginaire pur :

1. $z_1 = i(1-4i) + 3(2-i)$
2. $z_2 = (3-i)^2 + 6i$
3. $z_3 = \dfrac{3}{1-i}$
4. $z_4 = \dfrac{1+2i}{2-i}$

Exercice 8. Résoudre dans $\mathbb{C}$, l'équation :

$$\frac{z+3i}{-5iz+2} = -i$$

Exercice 9. Déterminer la forme algébrique des nombres complexes suivants : $\dfrac{1-i}{1+i}$ et $\dfrac{1}{2+i}$

Exercice 10. Déterminer le lieu des points M d'affixe z telle que $\dfrac{iz-1}{z-i}$ soit réel.

Exercice 11. On considère le complexe $z = x^2 + y^2 - 2x - 3 + i(2x - 1 + y)$

1. Déterminer et représenter l'ensemble E des points M d'affixe z tel que z soit un réel.
2. Déterminer et représenter l'ensemble F des points M′ d'affixe z tel que z soit un imaginaire pur.

Exercice 12. On considère dans $\mathbb{C}$ le polynôme défini par :

$$P(z) = z^4 + 4$$

1. Montrer que si le complexe α est solution, il en est de même pour $-\alpha$.
2. Vérifier que, pour tout nombre complexe z on a $\overline{P(z)} = P(\overline{z})$
3. Calculer $P(1+i)$ et en déduire les solutions de $P(z) = 0$.