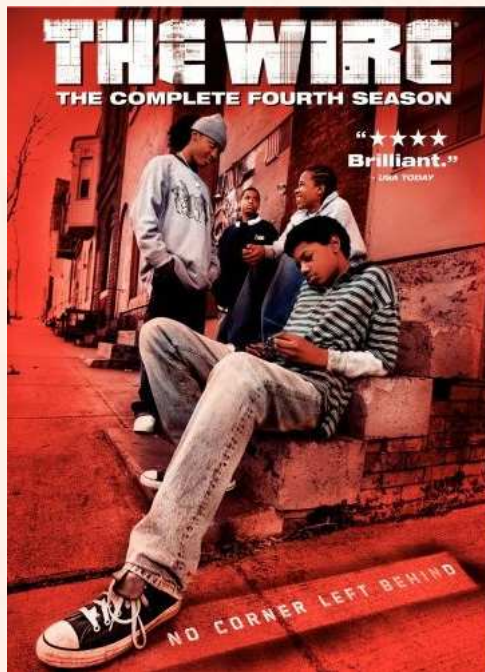


Chapitre 1

Divers raisonnements mathématiques



Hors Sujet



Titre : « The Wire »

Auteur : DAVID SIMON

Présentation succincte de l'auteur : Sur écoute (The Wire) est une série télévisée américaine, créée par David Simon et Ed Burns.

Elle a pour sujet la criminalité dans la ville de Baltimore, à travers la vision de ceux qui la vivent au quotidien : policiers, trafiquants en tous genres, politiques, enseignants, journalistes, résidents de Baltimore, etc.

Avec un aspect de quasi-documentaire par son réalisme et son non-manichéisme, la série est acclamée par la critique, bien qu'elle n'ait pas connu un succès commercial important. Elle est souvent considérée comme la meilleure série télévisée jamais diffusée à la télévision, et l'une des fictions les plus abouties dans les années 2000, notamment pour sa représentation réaliste quasi littéraire de la vie urbaine, et son exploration profonde des thèmes socio-politiques de l'Amérique.

Le tour de force de la série est de s'engager, sur le plan social, en montrant sans détour les pans les plus sombres du décor américain, son revers le plus inavouable, tout en mettant en scène une multitude de points de vue réalistes qui multiplient les questions dérangementantes sans jamais proposer de solution miracle. Il n'y a pas de fausse objectivité rassurante et pas de subjectivité accusatrice sous-jacente, l'épisode ne fait que montrer le plus passivement possible, il en résulte un étrange bourdonnement qui persiste longtemps après sa diffusion.

Document réalisé à l'aide de L^AT_EX

Auteur : D. Zancanaro

Site : wicky-math.fr/nf

Lycée : Jean Durand (Castelnaudary)

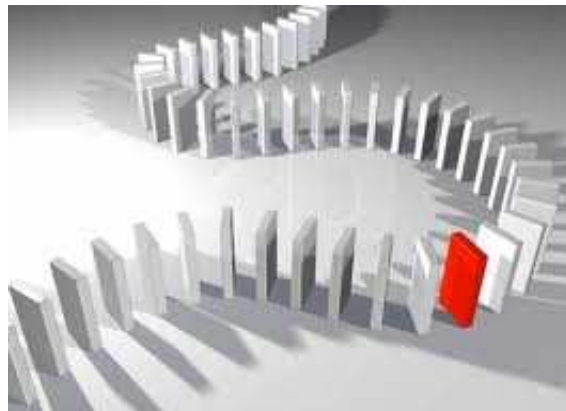
Table des matières

I. Des raisonnements déjà connus	1
I.1. Le raisonnement déductif : Implication \Rightarrow , réciproque \Leftarrow et équivalence \Leftrightarrow	1
I.2. Le contre-exemple	3
I.3. La disjonction de cas	3
I.4. L'absurde et la contraposé	4
II. Les quantificateurs pour tout \forall et il existe \exists	6
III. Un nouveau raisonnement : La récurrence	7
III.1. Exemple introductif	7
III.2. Principe du raisonnement par récurrence et exemples	7
III.3. Des exercices d'entraînement	9

L'essentiel :

- ↪ Maîtriser les symboles mathématiques de la démonstration
- ↪ Avoir conscience de différents types de raisonnements logiques
- ↪ Traduire et comprendre les quantificateurs
- ↪ Comprendre le principe du raisonnement par récurrence
- ↪ Rédiger une démonstration par récurrence

Leçon 1

Divers raisonnements
mathématiques

Introduction

L'objectif de ce chapitre est de faire le point sur divers types de raisonnements logiques utilisés en mathématiques, permettant d'établir des démonstrations.

Lorsque l'on cherche à démontrer qu'une proposition est toujours vraie ou au contraire fausse, on peut commencer par regarder des cas particuliers. Cependant, ceci ne prouve pas qu'une proposition est vraie tout le temps.

Il s'avère donc nécessaire de mettre en place des raisonnements logiques pour arriver à une conclusion valide. Il en existe plusieurs types, dont les principaux sont exposés ici.

A votre niveau, on ne vous demandera pas de savoir faire des démonstrations de cours, mais on peut vous demander de savoir les reproduire. Pour cela, la meilleure manière est de les comprendre, notamment dans leur démarche, et donc dans le type de raisonnement invoqué. De plus, vous constaterez que ces raisonnements sont valables pour résoudre des problèmes et des exercices de votre niveau. Vous avez déjà rencontré la plupart d'entre eux, mais vous allez également découvrir ici le raisonnement par récurrence, fondamental en classe de Terminale Scientifique.

I. Des raisonnements déjà connus

I.1. Le raisonnement déductif : Implication \implies , réciproque \impliedby et équivalence \iff 

Définition 1.

Le symbole \implies signifie « **implique** ». On peut également traduire une propriété contenant ce symbole sous la forme « Si ... Alors ».

L'**implication** est le principe même du raisonnement mathématique : dans une propriété, une hypothèse entraîne une conclusion.

On dit que l'hypothèse est une de **condition suffisante** pour conclure, et que la conclusion est une **condition nécessaire** pour avoir l'hypothèse.

Exemple 1. Considérons les propositions vraies suivantes :

\rightsquigarrow Si je m'appelle Ana, alors je suis une fille.

S'appeler Ana est une condition suffisante pour conclure que je suis une fille.

\rightsquigarrow Si un quadrilatère est un rectangle, alors c'est un parallélogramme.

Qu'un quadrilatère soit un rectangle est une condition suffisante pour conclure qu'il s'agit d'un parallélogramme.

\rightsquigarrow $x \geq 10 \implies 3x \geq 15$.

En revanche le fait que $3x$ soit supérieur (ou égal) à 15 n'implique pas que x est supérieur ou égal à 10.

 **Définition 2.**

La **réciproque** d'une propriété consiste à retourner la phrase en échangeant l'hypothèse et la conclusion, ou encore à changer le sens de la flèche.

Une propriété et sa réciproque sont indépendantes et se démontrent séparément.

En effet le fait qu'une propriété soit vraie n'implique pas que sa réciproque le soit !

Exemple 2. Considérons les réciproques des propositions de l'exemple précédent.

- ↪ Si je suis une fille, alors je m'appelle Ana : FAUX
Pour m'appeler Ana, il n'est pas suffisant d'être une fille.
- ↪ Si un quadrilatère est un parallélogramme, alors c'est un rectangle : FAUX
Pour qu'un quadrilatère soit un rectangle, il n'est pas suffisant qu'il soit un parallélogramme.
- ↪ $x \geq 10 \iff 3x \geq 15$: FAUX

 **Définition 3.**

Lorsqu'une propriété et sa réciproque sont vraies, on utilise le symbole \iff , qui signifie « **équivalent à** ». On peut également traduire ce symbole par « **Si et seulement si** ».

On parle d'**équivalence** entre l'hypothèse et la conclusion.

Exemple 3.

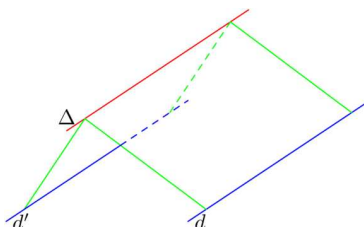
- ↪ ABC est un triangle rectangle en A si et seulement si $BC^2 = AB^2 + AC^2$
De sorte que cette proposition contient « deux résultats » :
 - d'une part si ABC est un triangle rectangle en A alors $BC^2 = AB^2 + AC^2$;
 - et d'autre part si $BC^2 = AB^2 + AC^2$ alors ABC est un triangle rectangle en A.
- ↪ $x \geq 5 \iff 3x \geq 15$
De nouveau cette proposition contient « deux résultats » :
 - Si $x \geq 5$ alors $3x \geq 15$
 - Si $3x \geq 15$ alors $x \geq 5$.

Démontrons le théorème du toit que voici :

 **Théorème 1.**

On suppose que deux plans \mathcal{P} et \mathcal{Q} sont sécants en une droite Δ . On suppose de plus que \mathcal{P} contient une droite d parallèle à une droite d' contenue dans le plan \mathcal{Q} .

Dans ces conditions, les droites Δ , d et d' sont toutes trois parallèles.



Démonstration. Nous devons démontrer l'implication suivante : $\begin{cases} \mathcal{P} \cap \mathcal{Q} = \Delta \\ d // d' \end{cases} \Rightarrow \Delta // d // d'$

Puisque d et Δ sont deux droites du plan \mathcal{P} , il n'existe que deux possibilités : soit elles n'ont aucun point commun soit elles ont au moins un point en commun. Dans le premier cas, puisque d et Δ sont contenues dans le plan \mathcal{P} elles sont donc coplanaires donc d est donc parallèle à Δ et le théorème du toit est démontré.

Dans le second cas, notons M un point commun entre d et Δ . Puisque d et d' sont parallèles, d est une droite parallèle à d' passant par M (un point du plan \mathcal{Q}) donc d est une droite du plan \mathcal{Q} et du plan \mathcal{P} par hypothèse : ainsi $d = \Delta$ et on a bien $\Delta // d // d'$. \square

1.2. Le contre-exemple

Travail de l'élève :

- Démontrer que les propositions suivantes sont fausses :
 - « Aujourd'hui tout est fabriqué en Chine »
 - « Un quadrilatère dont les diagonales sont de même longueur est un rectangle »
- Pour tout entier naturel $n \geq 1$, on considère la proposition $\mathcal{P}(n)$: « L'entier $n^2 - n + 11$ est premier » i.e. qu'il admet exactement deux diviseurs (1 et lui-même).
 - La proposition $\mathcal{P}(1)$ est-elle vraie ?
 - Faire un tableau de valeurs à la calculatrice de l'expression $n^2 - n + 11$ pour n allant de 1 à 10. Que dire de $\mathcal{P}(2)$? $\mathcal{P}(3)$? $\mathcal{P}(4)$? $\mathcal{P}(10)$?
 - La proposition $\mathcal{P}(n)$ est-elle vraie pour tout entier naturel n ?



Définition 4.

Le **contre-exemple** s'utilise pour montrer qu'il existe au moins un cas où une proposition n'est pas vraie, donc qu'elle est fausse.

Exercice 1. Montrer par un contre-exemple que la proposition $\mathcal{P}(n)$: « L'entier $n^2 - n + 41$ est premier » n'est pas vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1.3. La disjonction de cas



Définition 5.

On parle de raisonnement par **disjonction de cas** pour démontrer qu'une proposition est vraie, lorsque la démonstration effectuée dépend de la situation, mais que l'on traite tous les cas possibles séparément.

Au préalable, on commence par un tri, pour restreindre le nombre de cas à étudier.

Exemple 4.

- ↪ Aux échecs, le joueur qui a gagné annonce « Echec et Mat » avant que son adversaire joue, car il a envisagé tous les déplacements adverses possibles et qu'aucun ne l'empêche de gagner.
- ↪ Montrer par disjonction de cas que pour tout entier naturel n , le produit $n(n+1)$ est divisible par 2.

Solution :

Considérons les seuls deux cas possibles : n est soit pair, soit impair.

- ↪ Si n est pair, alors il existe un entier k tel que $n = 2k$ et donc $n(n+1) = 2k \times (2k+1)$ ce qui est un divisible par 2.
- ↪ Si n est impair, alors il existe un entier k tel que $n = 2k+1$ et donc $n(n+1) = (2k+1)(2k+1+1) = (2k+1)(2k+2) = 2(2k+1)(k+1)$ ce qui est divisible par 2.

Donc dans tous les cas, $n(n+1)$ est divisible par 2. La proposition est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

I.4. L'absurde et la contraposé

Définition 6.

Le raisonnement par l'**absurde** est une forme de raisonnement logique, consistant à démontrer la vérité d'une proposition en prouvant l'absurdité du contraire.

En effet, une proposition est forcément vraie ou fausse, mais jamais les deux à la fois.

Exercice 2.

1. Montrer par l'absurde que $\forall n \in \mathbb{N}, n^2 \text{ impair} \implies n \text{ impair}$.
2. Montrer que la réciproque de cette proposition est vraie aussi $\forall n \in \mathbb{N}$.
3. Traduire ces deux propriétés en une seule.

Méthode

En pratique : mécanisme du raisonnement par l'absurde

Pour montrer qu'une proposition A entraîne une proposition B :

- \rightsquigarrow On suppose A vraie et la négation de B
- \rightsquigarrow On montre que cela entraîne contradiction (avec l'hypothèse de A en général)
- \rightsquigarrow On en déduit que l'on a forcément $A \implies B$

Exemple 5. Démontrons (le théorème du toit i.e.) l'implication $\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{P} \cap \mathcal{Q} = \Delta \\ d // d' \end{array} \right. \implies \Delta // d // d'$

Raisonnons par l'absurde et supposons que la droite Δ ne soit pas parallèle aux droites d et d' .

Comme d et Δ sont deux droites du plan \mathcal{P} non parallèles alors elles sont sécantes en M; ainsi d est une droite parallèle à d' passant par M donc d est une droite du plan \mathcal{Q} ; par conséquent d est la droite d'intersection des plans \mathcal{P} et \mathcal{Q} , or il s'agit de Δ et d et Δ sont sécantes (donc non confondues) : bref il y a un truc qui cloche : notre hypothèse de départ était absurde.

Définition 7.

Soit \mathcal{P} la proposition suivante :

« Si A est vraie alors B est vraie » notée $A \implies B$

La **contraposée** de \mathcal{P} est la proposition :

« Si B n'est pas vraie alors A n'est pas vraie » notée $(\text{Non } B) \implies (\text{Non } A)$.

Propriété 1. (Définition)

Si une proposition \mathcal{P} est vraie, alors sa contraposée aussi (et réciproquement).

\mathcal{P} équivaut à Contraposée de \mathcal{P}
 $A \implies B$ si et seulement si $(\text{Non } B) \implies (\text{Non } A)$

On dit que la conclusion B est une **condition nécessaire** à l'hypothèse A.

Dans le cas où $A \iff B$, on dit que A est une **condition nécessaire et suffisante** à B (et réciproquement).

Démonstration. Notons \mathcal{P}' la contraposée de \mathcal{P} . On veut démontrer l'équivalence $\mathcal{P} \iff \mathcal{P}'$, donc l'implication et sa réciproque.

$\mathcal{P} \stackrel{?}{\implies} \mathcal{P}'$ Raisonnons par l'absurde :

Supposons \mathcal{P} vraie, mais \mathcal{P}' fausse, à savoir que $(\text{Non } B) \not\Rightarrow (\text{Non } A)$, ou encore qu'il existe au moins un cas où B est faux, mais A est vrai. Plaçons nous dans ce cas.

Comme A est vrai, d'après \mathcal{P} on a aussi B vrai, ce qui est absurde puisque l'on a supposé B faux. Donc A est forcément faux.

Ainsi, si une proposition est vraie, alors sa contraposée est vraie aussi.

$\mathcal{P} \stackrel{?}{\impliedby} \mathcal{P}'$ D'après ce qui précède, en supposant \mathcal{P}' vraie, on sait que sa contraposée l'est aussi.

Or la contraposée de \mathcal{P}' est $(\text{Non } (\text{Non } A)) \implies (\text{Non } (\text{Non } B))$, ie $A \implies B$ ou encore \mathcal{P} .

Donc $\mathcal{P}' \implies \mathcal{P}$.

CQFD

□

Exemple 6.

Le cogito de René Descartes « Je pense donc je suis » est équivalent à sa contraposée qui est « Je ne suis pas donc je ne pense pas ».

Exemple 7.

↪ Si je m'appelle Ana, alors je suis une fille.

Contraposée (vraie) : Si je ne suis pas une fille, alors je ne m'appelle pas Ana.

Il est nécessaire d'être une fille pour s'appeler Ana (mais cela n'est pas suffisant).

↪ Si un quadrilatère est un rectangle, alors c'est un parallélogramme.

Contraposée (vraie) : Si un quadrilatère n'est pas un parallélogramme, alors ce n'est pas un rectangle.

Il est nécessaire mais pas suffisant qu'un quadrilatère soit un parallélogramme pour être un rectangle

↪ $x \geq 10 \implies 3x \geq 15$.

Contraposée (vraie) : $3x < 15 \implies x < 10$

↪ Si ABC est un triangle rectangle en A, alors $AB^2 + AC^2 = BC^2$

Contraposée (vraie) : Si $AB^2 + AC^2 \neq BC^2$ alors ABC n'est pas un triangle rectangle en A.

Remarque : Une proposition ou sa contraposée sont donc équivalentes. Dans un cours, on pourrait donc écrire l'une ou l'autre sans perte d'information.

En général, le choix de formulation ne se fait pas en fonction de celle que l'on démontre le plus facilement, mais en fonction de celle que l'on emploie le plus aisément, ou tout simplement celle qu'on a l'habitude de rencontrer dans les divers ouvrages : il ne faut pas oublier ce que l'on a reçu en héritage, provenant de divers horizons, et il est tout à fait normal de continuer à formuler certaines propriétés comme elles l'ont toujours été, tout en sachant que dès que l'on en aura besoin, on pourra passer de l'une à l'autre sans problème.

Exercice 3. On rappelle que $\forall n \in \mathbb{N}$, n pair $\iff n^2$ pair.

Montrer par l'absurde que $\sqrt{2}$ est irrationnel, c'est-à-dire qu'il ne s'écrit pas sous la forme d'un quotient d'entiers $\frac{p}{q}$ avec $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{Z}^*$.

II. Les quantificateurs pour tout \forall et il existe \exists



Définition 8.

Les **quantificateurs**. Ils précisent le domaine de validité d'une propriété.

Au lycée, vous devez connaître les symboles \forall et \exists , qui signifient respectivement « **Pour tout** » et « **Il existe un** », sous entendu « (au moins) ». La virgule qui suivra le symbole \exists sera alors traduite par « tel que ».

Il est donc essentiel de bien les comprendre pour savoir dans quels cas une propriété peut s'appliquer.

Attention : Lorsqu'on énonce des propositions toujours vraies en français, on sous-entend souvent les quantificateurs.

Attention : Les deux quantificateurs « **tout** » et « **il existe** » sont liés lorsqu'il s'agit d'énoncer le contraire d'une proposition. En effet, le contraire de « tout » n'est pas « aucun », mais « il existe (au moins) un ».

Exercice 4. On définit sur \mathbb{N}^* la suite (u_n) de terme général $u_n = \frac{1}{n}$.

On considère la proposition suivante :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N \text{ on a } u_n < \varepsilon$$

1. Traduire cette phrase mathématique en français.
2. On choisit $\varepsilon = 1$.
 - (a) Trouver un rang p telle que $u_p < \varepsilon$.
 - (b) Montrer que pour tout $n \geq p$ on a $u_n < \varepsilon$
 - (c) Conclure par rapport à la proposition donnée dans ce cas particulier.
3. Même question pour $\varepsilon = 0.1, 0.01$ et 10^{-6} .
4. Peut-on conclure que la proposition est vraie ?
5. Démontrer cette proposition dans le cas général (ie pour ε quelconque).

III. Un nouveau raisonnement : La récurrence

III.1. Exemple introductif

Considérons la suite (u_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par :

$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = 2u_n + 1 \end{cases}$$

Cette suite est définie par récurrence (chaque terme se calcule à partir du précédent).

But : On souhaiterait obtenir une formule explicite de u_n en fonction de n . La suite n'est ni géométrique, ni arithmétique, et la formule ne semble pas évidente, par conséquent on va calculer les premiers termes pour se faire une idée.

$$\begin{aligned} u_0 &= 0 \\ u_1 &= 2 \times 0 + 1 = 1 \\ u_2 &= 2 \times 1 + 1 = 3 \\ u_3 &= 2 \times 3 + 1 = 7 \\ u_4 &= 2 \times 7 + 1 = 15 \\ u_5 &= 2 \times 15 + 1 = 31 \\ u_6 &= 2 \times 31 + 1 = 63 \end{aligned}$$

Bien, en observant les premiers termes de cette suite il semble logique que $u_6 = 127$, en effet en ajoutant 1 à chaque terme on obtient les puissances successive de 2. Autrement dit il **semble** que

$$u_n = 2^n - 1 \forall n \in \mathbb{N}$$

Attention, une conjecture n'est pas une preuve (ni une affirmation forcément vraie, certaines conjectures se révèlent parfois fausses...). Ce n'est que l'énoncé d'une propriété résultant d'un certain nombre d'observations. **Alors comment confirmer, par une démonstration, la propriété conjecturée ci-dessus ?**

Notons $\mathcal{P}(n)$ la propriété définie pour $n \in \mathbb{N}$, par :

$$\mathcal{P}(n) : u_n = 2^n - 1$$

Supposons un instant, que pour un certain entier n , on ait effectivement la propriété $\mathcal{P}(n) : u_n = 2^n - 1$

Dans ce cas on aurait : $u_{n+1} = 2 \times u_n + 1 = 2 \times (2^n - 1) + 1 = 2^{n+1} - 2 + 1 = 2^{n+1} - 1$

Autrement dit si $\mathcal{P}(n)$ est vraie alors $\mathcal{P}(n+1)$ aussi.

On dit que la propriété \mathcal{P} est **héréditaire**.

Au final on a vu que la propriété \mathcal{P} était vraie au rang $n = 0, 1, 2, 3, 4, 5$ et 6 (on dit que la propriété est **initialisée**). Mais comme la propriété \mathcal{P} est héréditaire elle sera vraie au rang 7, puis au rang 8, puis au rang 9, Si bien que notre propriété est finalement vraie à tout rang. Nous venons de faire un **raisonnement par récurrence** :

III.2. Principe du raisonnement par récurrence et exemples

Principe du raisonnement par récurrence : Soit \mathcal{P} une propriété définie sur \mathbb{N} (ou sur une partie de \mathbb{N})

Si :

↪ La propriété est initialisée à un certain rang n_0 (i.e si \mathcal{P} est vraie pour $n = n_0$)

↪ La propriété est héréditaire à partir du rang n_0 (i.e si pour $n \geq n_0$ \mathcal{P} vraie au rang $n \implies \mathcal{P}$ vraie au rang $n+1$)

Alors :

La propriété est vraie à tout rang plus grand que n_0 .

Exemple 8. Compléter la démonstration par récurrence suivante, afin de montrer que la somme des n premiers entiers non nuls vaut $\frac{n(n+1)}{2}$.

Pour tout $n \geq \dots$, on note $\mathcal{P}(n)$ la proposition «

↪ **Initialisation** : pour $n =$
La somme des n premiers entiers non nuls vaut
Et $\frac{n(n+1)}{2} =$

Donc $\mathcal{P}(\dots)$ est vraie.

↪ **Hérédité** : Démontrons que si \mathcal{P} est vraie au rang n alors \mathcal{P} est vraie au rang $n+1$

On suppose donc $\mathcal{P}(n)$: «

et on cherche à montrer que cela implique $\mathcal{P}(n+1)$: «

$$\text{Or } 1+2+3+\dots+\dots+n+(n+1) =$$

$$=$$

$$=$$

Donc $\mathcal{P}(\dots) \Rightarrow \mathcal{P}(\dots)$. La proposition est

↪ **Conclusion** La proposition est et
Elle est donc vraie pour tout $n \geq$

Exercice 5. On note $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = \sqrt{u_n + 6}$.
Démontrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}$ on a $0 \leq u_n \leq 3$.

Solution :

Pour tout $n \geq 0$, on note $\mathcal{P}(n)$ la proposition « $0 \leq u_n \leq 3$ »

↪ **Initialisation** : pour $n = 0$
 $u_0 = 0$ et on a bien $0 \leq 0 \leq 3$
Donc $0 \leq u_0 \leq 3$ et $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

↪ **Hérédité** : On suppose qu'il existe un entier $k \geq 0$ tel que $\mathcal{P}(k)$ est vraie, ie tel que l'on a $0 \leq u_k \leq 3$
On cherche à montrer $\mathcal{P}(k+1)$: « $0 \leq u_{k+1} \leq 3$ » ou encore $0 \leq \sqrt{u_k + 6} \leq 3$

$$\begin{aligned} \text{Or } 0 \leq u_k \leq 3 &\iff 6 \leq u_k + 6 \leq 9 \\ &\iff \sqrt{6} \leq \sqrt{u_k + 6} \leq \sqrt{9} \quad \text{car la fonction racine carré conserve l'ordre sur les positifs} \\ &\iff 0 \leq u_{k+1} \leq 3 \end{aligned}$$

Donc $\mathcal{P}(k+1)$ est vraie. La proposition est héréditaire.

↪ **Conclusion** La proposition est vraie au rang 0 et héréditaire à partir de 0.
Elle est donc vraie pour tout $n \geq$

III.3. Des exercices d'entraînement**Exercice 6.** On donne ci-dessous trois propositions vraies.

1. Pour tout entier $n \geq 5$, $2^n > n^2$
2. Pour tout réel $x > 0$, $(x+1)^3 \geq 1+3x$
3. Pour tout entier $n \geq 1$, $\sum_{k=1}^n (2k-1)^3 = 2n^4 - n^2$

Pour lesquelles peut-on envisager une démonstration par récurrence (que l'on ne fera pas) ?

Exercice 7. La suite (u_n) est définie, pour tout entier naturel n , par :
$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = 2u_n - 3 \end{cases}$$
Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n , on a $u_n = 3 - 2^n$ **Exercice 8.** On considère la suite u définie sur \mathbb{N} par son premier terme u_0 et pour tout n par la relation $u_{n+1} = 3u_n + 1$. Démontrer chacune des propositions suivantes.

1. La proposition « $u_n \leq u_{n+1}$ » est héréditaire.
2. La proposition « $u_n \geq u_{n+1}$ » est héréditaire.
3. Si $u_0 = 1$ la suite u est croissante.
4. Si $u_0 = -2$, la suite u est décroissante.
5. Si $u_0 = -0,5$, la suite u est stationnaire.

Exercice 9.

1. Montrer que les deux propositions suivantes sont héréditaires
(A) : « $10^n - 1$ est un multiple de 9 » (B) : « $10^n + 1$ est un multiple de 9 »
2. Sont-elles vraies pour tout entier naturel n ?

Exercice 10. On s'intéresse désormais à la somme S_n des cubes des n premiers entiers naturels impairs.

1. Calculer S_1 , S_2 et S_3 .
2. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel $n \geq 1$, on a

$$S_n = 2n^4 - n^2$$

3. Quel est l'entier n pour lequel $S_n = 41328$?

Exercice 11. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n , $2^{3n} - 1$ est un multiple de 7.**Exercice 12.** On considère la suite (u_n) définie sur \mathbb{N} par :

$$u_0 = 3 \quad \text{et} \quad u_{n+1} = 2 + \frac{1}{u_n}$$

Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a :

$$2 \leq u_n \leq 3$$

Exercice 13. Montrer que $4^n - 1$ est un multiple de 3 pour tout entier naturel n .**Exercice 14.** Démontrer que pour tout entier $n \geq 0$, l'inégalité de Bernoulli est vraie :

$$\forall x > 0, \text{ on a } (1+x)^n \geq 1+nx$$

Exercice 15.

1. Rappeler ce que signifie l'écriture $\binom{n}{k}$ pour n et k entiers tels que $0 \leq k \leq n$.

2. Compléter la propriété suivante, vu en première :

Pour tous n et k entiers tels que $0 \leq k \leq n$, on a $\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} =$

3. Ecrire les 5 premières lignes du triangle de Pascal.

4. Démontrer que pour tous réels a et b on a

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

5. Quel lien observe-t-on entre les coefficients de développement et le triangle de Pascal ?

6. Démontrer par récurrence que pour tout $n \geq 1$ on a :

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

formule appelée **formule du binôme de Newton**.

7. *Application* : développer $(a+b)^5$ sans calcul.

Exercice 16. Démontrer que

$$\sum_{k=0}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Exercice 17. Considérons la suite (u_n) , définie pour tout $n \in \mathbb{N}$, par :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_1 = 2 \\ u_{n+2} = 5u_{n+1} - 6u_n \end{cases}$$

Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_n = 2^n$$

Exercice 18. Démontrer que, pour tout entier $n \geq 2$, la fonction f_n , définie sur \mathbb{R} par $f_n(x) = x^n$, est dérivable sur \mathbb{R} , avec $f'_n(x) = nx^{n-1}$ **Exercice 19.** On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 0$ et pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1} = \sqrt{\frac{1+u_n}{2}}$$

Montrer, par récurrence, que pour tout $n \geq 1$ on a $\frac{1}{\sqrt{2}} \leq u_n \leq 1$