∽ CORRECTION TRAVAUX DE GROUPE 2 ∽
LES NOMBRES COMPLEXES

Exercice 1. On considère la suite de nombres complexes (z_n) définie par $z_0 = \sqrt{3} - \mathrm{i}$ et pour tout entier naturel n :

$$z_{n+1} = (1 + \mathrm{i})z_n.$$

Les parties A et B peuvent être traitées de façon indépendante.

Partie A

Pour tout entier naturel n, on pose $u_n = |z_n|$.

1. Calculer u_0.

Solution

$$u_0 = |z_0| = |\sqrt{3} - i| = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + (-1)^2} = 2$$

2. Démontrer que (u_n) est la suite géométrique de raison $\sqrt{2}$ et de premier terme 2.

Solution

P our tout entier naturel n on a :

$$u_{n+1} = |z_{n+1}| = |(1 + i) \times z_n| = |1 + i| \times |z_n| = \sqrt{1^2 + 1^2} \times u_n = \sqrt{2}u_n$$

De plus $u_0 = |z_0| = 2$ donc (u_n) est bien une suite géométrique de raison $\sqrt{2}$ et de premier terme 2.

3. Pour tout entier naturel n, exprimer u_n en fonction de n.

Solution

Puisque (u_n) est une suite géométrique de raison $\sqrt{2}$ et de premier terme $u_0 = 2$ on a, pour tout entier naturel n :

$$u_n = u_0 \times q^n = 2 \times \sqrt{2}^n$$

4. Déterminer la limite de la suite (u_n).

Solution

Puisque $\sqrt{2} > 1$ on a $\lim\limits_{n \to +\infty} \sqrt{2}^n = +\infty$ et donc $\lim\limits_{n \to +\infty} 2 \times \sqrt{2}^n = +\infty$

5. Étant donné un réel positif p, on souhaite déterminer, à l'aide d'un algorithme, la plus petite valeur de l'entier naturel n telle que $u_n > p$.
   Recopier l'algorithme ci-dessous et le compléter par les instructions de traitement et de sortie, de façon à afficher la valeur cherchée de l'entier n.

Variables	:	u est un réel
		p est un réel
		n est un entier
Initialisation	:	Affecter à n la valeur 0
		Affecter à u la valeur 2
Entrée	:	Demander la valeur de p
Traitement	:	Tant que $u \leq p$ faire
		Affecter à n la valeur $n+1$
		Affecter à u la valeur $\sqrt{2} \times u$
Sortie	:	
		Afficher n

Partie B

1. Déterminer la forme algébrique de z_1.

Solution

$$z_1 = (1+i)(\sqrt{3}-i) = \sqrt{3} - i + i\sqrt{3} + 1 = 1 + \sqrt{3} + i(\sqrt{3}-1)$$

2. (a) Déterminer le module et un argument de z_0 puis de $1+\text{i}$.

Solution

O n sait déjà que $|z_0| = 2$ donc un argument de z_0, disons θ satisfait $\cos\theta = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ et $\sin\theta = \dfrac{-1}{2}$, par conséquent $\theta = -\dfrac{\pi}{6} + 2k\pi$ où désigne un entier relatif.

De même :

$$1 + i = \sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + i \times \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$$

par conséquen $|1+i| = \sqrt{2}$ et un argument de $1+i$ est $\dfrac{\pi}{4}$

(b) En déduire le module puis un argument de z_1.

Solution

$z_1 = (1+i)z_0$ donc $|z_1| = u_1 = 2 \times \sqrt{2}^1 = 2\sqrt{2}$ et $arg(z_1) = arg((1+i)z_0 + 2k\pi = arg(1+i) + arg(z_0) + 2k\pi$

De plus $arg(1+i) = \dfrac{\pi}{4} + 2k\pi$ où $k \in \mathbb{Z}$ et $arg(z_0) = -\dfrac{\pi}{6} + 2k\pi$, par conséquent :

$$arg(z_1) = \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6} + 2k\pi = \frac{\pi}{12} + 2k\pi$$

3. Déduire des questions précédentes la valeur exacte de $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$

Solution

O n sait que $z_1 = 1+\sqrt{3}+i(\sqrt{3}-1)$ et $arg(z_1) = \frac{\pi}{12}$, on en déduit immédiatement que :

$$\cos\frac{\pi}{12} = \frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$$