Nom : .... **Prénom :** .... Classe :......

CORRECTION DE L'INTERROGATION N°5

On prendra soin de coller le sujet sur la copie. La note tiendra compte de la qualité de la rédaction et de l'application.

Exercice 1. *10 points*

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}\backslash\{1\}$ par :

$$f(x) = \frac{x^3+x+1}{x-1}$$

1. Déterminer les limites de f (on précisera s'il y a lieu l'existence d'asymptote) :

(a) lorsque x tend vers $+\infty$ puis lorsque x tend vers $-\infty$;

Solution

Nous devons lever l'indetermination en factorisant par la puissance de degré maximal au numérateur comme au dénominateur, ainsi pour $x \neq 0$ on a :

$$f(x) = \frac{x^3\left(1+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}\right)}{x\left(1-\frac{1}{x}\right)} = \frac{x^2\left(1+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}\right)}{1-\frac{1}{x}}$$

On sait que $\lim\limits_{x\to\pm\infty} x^2 = +\infty$, puis on a $\lim\limits_{x\to\pm\infty} 1+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3} = 1$, de sorte que par produit on a :

$$\lim_{x\to\pm\infty} x^2\left(1+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}\right) = +\infty$$

De plus $\lim\limits_{x\to\pm\infty} 1-\frac{1}{x} = 1$ et donc par quotient on conclut que :

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2\left(1+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}\right)}{1-\frac{1}{x}} = +\infty$$

Nous en déduisons que $\mathscr{C}_f$ n'admet pas d'asymptote horizontale en $\pm\infty$

(b) lorsque x tend vers 1^+ puis lorsque x tend vers 1^-.

Solution

On a $\lim\limits_{x\to 1^+} x^3+x+1 = 3$ et $\lim\limits_{x\to 1^+} x-1 = 0^+$ donc par quotient on obtient :

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{x^3+x+1}{x-1} = +\infty$$

De même on a $\lim\limits_{x\to 1^-} x^3+x+1 = 3$ et $\lim\limits_{x\to 1^-} x-1 = 0^-$ donc par quotient on obtient :

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{x^3+x+1}{x-1} = -\infty$$

Nous en déduisons que $\mathscr{C}_f$ admet une asymptote verticale d'équation $x = 1$.

2. Déterminer $f'(x)$ pour $x \neq 1$.

Solution

P our tout $x \neq 1$ on a :

$$f'(x) = \frac{(x^3+x+1)'(x-1)-(x^3+x+1)(x-1)'}{(x-1)^2} = \frac{(3x^2+1)(x-1)-(x^3+x+1)}{(x-1)^2} = \frac{3x^3-3x^2+x-1-(x^3+x+1)}{(x-1)^2} = \frac{2x^3-3x^2-2}{(x-1))^2}$$

3. On pose $g(x) = 2x^3-3x^2-2$.

(a) Déterminer les limites de g lorsque x tend vers $+\infty$ puis lorsque x tend vers $-\infty$.

Solution

O n a $\lim\limits_{x\to-\infty} x^3 = -\infty$ puis $\lim\limits_{x\to-\infty} -3x^2-2 = -\infty$ donc par somme on trouve $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = -\infty$.

Par contre il faut lever l'indetermination en $+\infty$, pour cela factorisons par x^3, et donc pour $x \neq 0$ on a :

$$g(x) = x^3\left(2 - \frac{3}{x} - \frac{2}{x^3}\right)$$

Désormais on a $\lim\limits_{x\to+\infty} x^3 = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} 2 - \frac{3}{x} - \frac{2}{x^3} = 2$ donc par produit :

$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$$

(b) Calculer $g'(x)$ puis dresser le tableau de variation de g sur $\mathbb{R}$.

Solution

Pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a $g'(x) = 6x^2 - 6x$.

$6x^2 - 6x = 0 \Longleftrightarrow x(6x-6) = 0 \Longleftrightarrow x = 0 \quad \text{ou} \quad 6x - 6 = 0 \Longleftrightarrow x = 0 \quad \text{ou} \quad x = 1$

on en déduit le tableau de signe de g' et le tableau de variation de g :

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$g(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	-2	$\searrow$	-3	$\nearrow$	$+\infty$

(c) Démontrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution dans $\mathbb{R}$ que l'on note α. Donner un encadrement de α à 10^{-1} près.

Solution

D 'après la question précédente sur l'intervalle $]-\infty;1]$ la fonction g admet un maximum qui est -2, de sorte que $g(x) \leq -2$ pour tout $x \leq 1$ donc l'équation $g(x) = 0$ n'admet pas de solution dans l'intervalle $]-\infty;1]$.

De plus sur l'intervalle $]1;+\infty[$:

— g est continue puisqu'il s'agit d'un polynôme ;

— g est strictement croissante ;

— g est à valeurs dans l'intervalle $[-3;+\infty[$ et $0 \in [-3;+\infty[$

Ainsi d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution dans l'intervalle $]1;+\infty[$.

Bilan, l'équation $g(x) = 0$ admet exactement une solution sur $\mathbb{R}$.

De plus, on constate que $g(1,8) < 0$ et $g(1,9) > 0$ donc si cette solution s'appelle α alors $1,8 < \alpha < 1,9$.

(d) Dresser le tableau de signe de g sur $\mathbb{R}$.

Solution

O n déduit immédiatement des deux questions précédentes que :

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$g(x)$		$-$	0	$+$	

4. En déduire le tableau des variations de f sur $\mathbb{R}\backslash\{1\}$.

Solution

Rappelons ici que $f'(x) = \dfrac{2x^3 - 3x^2 - 2}{(x-1))^2} = \dfrac{g(x)}{(x-1)^2}$ d'où :

x	$-\infty$		1		α		$+\infty$
$g(x)$			$-$		0	$+$	
$(x-1)^2$		$+$	0		$+$		
$f'(x)$		$-$	$\|$	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$\|$	$\searrow$	$f(\alpha)$	$\nearrow$	$+\infty$

Nom : .... **Prénom :** .... Classe :......

INTERROGATION N°5

On prendra soin de coller le sujet sur la copie. La note tiendra compte de la qualité de la rédaction et de l'application.

Exercice 1. *10 points*

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}\setminus\{1\}$ par :

$$f(x) = \frac{x^3-3x+1}{x-1}$$

1. Déterminer les limites de f (on précisera s'il y a lieu l'existence d'asymptote) :

   (a) lorsque x tend vers $+\infty$ puis lorsque x tend vers $-\infty$;

Solution

Nous devons lever l'indetermination en factorisant par la puissance de degré maximal au numérateur comme au dénominateur, ainsi pour $x \neq 0$ on a :

$$f(x) = \frac{x^3\left(1-\frac{3}{x^2}+\frac{1}{x^3}\right)}{x\left(1-\frac{1}{x}\right)} = \frac{x^2\left(1-\frac{3}{x^2}+\frac{1}{x^3}\right)}{1-\frac{1}{x}}$$

On sait que $\lim\limits_{x\to\pm\infty} x^2 = +\infty$, puis on a $\lim\limits_{x\to\pm\infty} 1-\dfrac{3}{x^2}+\dfrac{1}{x^3} = 1$, de sorte que par produit on a :

$$\lim_{x\to\pm\infty} x^2\left(1-\frac{3}{x^2}+\frac{1}{x^3}\right) = +\infty$$

De plus $\lim\limits_{x\to\pm\infty} 1-\dfrac{1}{x} = 1$ et donc par quotient on conclut que :

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2\left(1-\frac{3}{x^2}+\frac{1}{x^3}\right)}{1-\frac{1}{x}} = +\infty$$

Nous en déduisons que $\mathscr{C}_f$ n'admet pas d'asymptote horizontale en $\pm\infty$

   (b) lorsque x tend vers 1^+ puis lorsque x tend vers 1^-.

Solution

On a $\lim\limits_{x\to1^+} x^3-3x+1 = -1$ et $\lim\limits_{x\to1^+} x-1 = 0^+$ donc par quotient on obtient :

$$\lim_{x\to1^+} \frac{x^3-3x+1}{x-1} = -\infty$$

De même on a $\lim\limits_{x\to1^-} x^3-3x+1 = -1$ et $\lim\limits_{x\to1^-} x-1 = 0^-$ donc par quotient on obtient :

$$\lim_{x\to1^-} \frac{x^3-3x+1}{x-1} = +\infty$$

Nous en déduisons que $\mathscr{C}_f$ admet une asymptote verticale d'équation $x=1$.

2. Déterminer $f'(x)$ pour $x \neq 1$.

Solution

Pour tout réel $x \neq 1$ on a :

$$f'(x) = \frac{(x^3-3x+1)'(x-1)-(x^3-3x+1)(x-1)'}{(x-1)^2} = \frac{(3x^2-3)(x-1)-x^3+3x-1}{(x-1)^2} = \frac{2x^3-3x^2+2}{(x-1)^2}$$

3. On pose $g(x) = 2x^3-3x^2+2$.

   (a) Déterminer les limites de g lorsque x tend vers $+\infty$ puis lorsque x tend vers $-\infty$.

Solution

O n a $\lim\limits_{x\to-\infty} x^3 = -\infty$ puis $\lim\limits_{x\to-\infty} -3x^2+2 = -\infty$ donc par somme on trouve $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = -\infty$.

Par contre il faut lever l'indetermination en $+\infty$, pour cela factorisons par x^3, et donc pour $x \neq 0$ on a :

$$g(x) = x^3\left(2-\frac{3}{x}+\frac{2}{x^3}\right)$$

Désormais on a $\lim\limits_{x\to+\infty} x^3 = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} 2-\dfrac{3}{x}+\dfrac{2}{x^3} = 2$ donc par produit :

$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$$

(b) Calculer $g'(x)$ puis dresser le tableau de variation de g sur $\mathbb{R}$.

Solution

Pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a $g'(x) = 6x^2 - 6x$.

$6x^2 - 6x = 0 \Longleftrightarrow x(6x-6) = 0 \Longleftrightarrow x = 0 \quad \text{ou} \quad 6x-6 = 0 \Longleftrightarrow x = 0 \quad \text{ou} \quad x = 1$

on en déduit le tableau de signe de g' et le tableau de variation de g :

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$g(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	2	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

(c) Démontrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution dans $\mathbb{R}$ que l'on note α. Donner un encadrement de α à 10^{-1} près.

Solution

D 'après la question précédente sur l'intervalle $[0;+\infty[$ la fonction g admet un minimum qui est 1, de sorte que $g(x) \geq 1$ pour tout $x \geq 0$ donc l'équation $g(x) = 0$ n'admet pas de solution dans l'intervalle $[0;+\infty[$.

De plus sur l'intervalle $]-\infty;0[$:

— g est continue puisqu'il s'agit d'un polynôme ;

— g est strictement croissante ;

— g est à valeurs dans l'intervalle $]-\infty;2[$ et $0 \in]-\infty;2[$

Ainsi d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution dans l'intervalle $]-\infty;0[$.

Bilan, l'équation $g(x) = 0$ admet exactement une solution sur $\mathbb{R}$.

De plus, on constate que $g(-0.7) < 0$ et $g(-0.6) > 0$ donc si cette solution s'appelle α alors $-0.7 < \alpha < -0.6$.

(d) Dresser le tableau de signe de g sur $\mathbb{R}$.

Solution

O n déduit immédiatement des deux questions précédentes que :

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$g(x)$		$-$	0	$+$	

4. En déduire le tableau des variations de f sur $\mathbb{R}\backslash\{1\}$.

Solution

Rappelons ici que $f'(x) = \dfrac{2x^3-3x^2+2}{(x-1))^2} = \dfrac{g(x)}{(x-1)^2}$ d'où :

x	$-\infty$		α		1		$+\infty$
$g(x)$		$-$	0		$+$		
$(x-1)^2$			$+$		0	$+$	
$f'(x)$		$-$	0	$+$	$\Vert$	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$f(\alpha)$	$\nearrow$	$\Vert$	$\nearrow$	$+\infty$