Nom : .... **Prénom :** .... Classe :......

CORRECTION DE L'INTERROGATION N°4

On prendra soin de coller le sujet sur la copie. La note tiendra compte de la qualité de la rédaction et de l'application.

Exercice 1. *10 points*

Dans le plan complexe munit du repère orthonormal $(O; \vec{u}, \vec{v})$, on considère le point M d'affixe z et le point M$'$ d'affixe z' définit par :

$$z' = -z^2 - 1$$

On dit que M$'$ est l'image du point M.

1. Quel est l'image du point M d'affixe i ?

Solution

L 'image du point M d'affixe i est le point M$'$ d'affixe $z' = -(i)^2 - 1 = 1 - 1 = 0$.

2. Quels sont les points M dont l'image est l'origine du repère ?

Solution

L es points M dont l'image est l'origine du repère sont ceux dont l'affixe z est solution de l'équation $-z^2 - 1 = 0 \iff z^2 = -1 \iff z = \pm i$.

3. (a) Résoudre, dans $\mathscr{C}$, l'équation :

$$z^2 + z + 1 = 0$$

Solution

$\Delta = b^2 - 4ac = 1 - 4 = -3$ donc l'équation $z^2 + 2z + 1 = 0$ admet deux solutions complexes conjuguées qui sont $\dfrac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}$.

(b) En déduire l'ensemble des points M du plan confondu avec leur image M$'$, c'est-à-dire vérifiant $z' = z$.

Solution

$$z' = z \iff -z^2 - 1 = z \iff 0 = z^2 + z + 1 \iff z = \frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}$$

4. On note $j = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

(a) Déterminer le module et un argument de j puis écrire j sous forme trigonométrique.

Solution

$$j = \cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}$$

donc $|j| = 1$ et $arg(j) = 2\pi 3$

(b) Déterminer le module et un argument de $\overline{j}$ puis écrire $\overline{j}$ sous forme trigonométrique.

Solution

$\overline{j} = -\dfrac{1}{2} - i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, puisque $|j| = 1$ alors $|\overline{j}| = 1$ et puisque $arg(j) = \dfrac{2\pi}{3}$ alors $arg(\overline{j}) = -2\pi 3$ d'où :

$$\overline{j} = \cos\frac{-2\pi}{3} + i\sin\frac{-2\pi}{3}$$

5. On note M$_n$ le point du plan complexe d'affixe z_n définit par $z_n = j^n$ pour tout entier naturel n.

(a) Calculer OM_n, que peut-on en déduire quant à la position des points M_n dans le plan complexe ?

Solution

$$OM_n = |j^n| = |j|^n = 1^n = 1$$

M_n est un point du cercle trigonométrique pour tout entier naturel n.

(b) Démontrer qu'un argument de z_n vaut $\frac{2n\pi}{3}$.

Solution

$$arg(z_n) = arg(j^n) = narg(j) = \frac{2n\pi}{3}$$

(c) Placer à l'aide de la règle non graduée et du compas, les points M_0, M_1, M_2 et M_3 sur une figure.

(d) Expliquer où se situe le point M_{2017} dans le plan complexe puis le placer sur votre figure.

Solution

M_{2017} est tout d'abord un point du cercle trigonométrique, de plus son argument vaut
$$\frac{4034\pi}{3} = \frac{3\times 1347\pi + 2\pi}{3} = 1347\pi + \frac{2\pi}{3} = 673\times 2\pi + \pi + \frac{2\pi}{3} = \frac{4\pi}{3} + 673\times 2\pi$$

Nom : .... **Prénom :** .... Classe :......

CORRECTION DE L'INTERROGATION N°3

On prendra soin de coller le sujet sur la copie. La note tiendra compte de la qualité de la rédaction et de l'application.

Exercice 1. *10 points*

Dans le plan complexe munit du repère orthonormal $(O; \vec{u}, \vec{v})$, on considère le point M d'affixe z et le point M′ d'affixe z' définit par :

$$z' = \frac{-z^2 - 1}{\sqrt{2}}$$

On dit que M′ est l'image du point M.

1. Quel est l'image du point M d'affixe i ?

Solution

L 'image du point M d'affixe i est le point M′ d'affixe $z' = (-(i)^2 - 1)/\sqrt{2} = (1-1)/\sqrt{2} = 0$.

2. Quels sont les points M dont l'image est l'origine du repère ?

Solution

L es points M dont l'image est l'origine du repère sont ceux dont l'affixe z est solution de l'équation
$$\frac{-z^2 - 1}{\sqrt{2}} = 0 \iff -z^2 - 1 = 0 \iff z^2 = -1 \iff z = \pm i.$$

3. (a) Résoudre, dans $\mathscr{C}$, l'équation :

$$z^2 + \sqrt{2}z + 1 = 0$$

Solution

$\Delta = b^2 - 4ac = 2 - 4 = -2$ donc l'équation $z^2 + \sqrt{2}z + 1 = 0$ admet deux solutions complexes conjuguées qui sont $\frac{-\sqrt{2} \pm i\sqrt{2}}{2}$.

(b) En déduire l'ensemble des points M du plan confondu avec leur image M′, c'est-à-dire vérifiant $z' = z$.

Solution

$$z' = z \Longleftrightarrow -z^2 - 1 = \sqrt{2}z \Longleftrightarrow 0 = z^2 + \sqrt{2}z + 1 \Longleftrightarrow z = \frac{-\sqrt{2} \pm i\sqrt{2}}{2}$$

4. On note $k = -\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}$.

   (a) Déterminer le module et un argument de k puis écrire k sous forme trigonométrique.

Solution

$$\mathrm{K} = \cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}$$

$$\text{donc } |k| = 1 \text{ et } arg(k) = \frac{3\pi}{4}$$

   (b) Déterminer le module et un argument de $\overline{\mathrm{K}}$ puis écrire $\overline{\mathrm{K}}$ sous forme trigonométrique.

Solution

$\overline{k} = -\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}$, puisque $|k| = 1$ alors $|\overline{k}| = 1$ et puisque $arg(k) = \frac{3\pi}{4}$ alors $arg(\overline{k}) = -\frac{3\pi}{4}$ d'où :

$$\overline{k} = \cos\frac{-3\pi}{4} + i\sin\frac{-3\pi}{4}$$

5. On note M_n le point du plan complexe d'affixe z_n définit par $z_n = k^n$ pour tout entier naturel n.

   (a) Calculer OM_n, que peut-on en déduire quant à la position des points M_n dans le plan complexe ?

Solution

$$\mathrm{OM}_n = |k^n| = |k|^n = 1^n = 1$$

M_n est un point du cercle trigonométrique pour tout entier naturel n.

   (b) Démontrer qu'un argument de z_n vaut $\frac{3n\pi}{4}$.

Solution

$$arg(z_n) = arg(k^n) = n\,arg(k) = \frac{3n\pi}{4}$$

   (c) Placer à l'aide de la règle non graduée et du compas, les points M_0, M_1, M_2, M_3, M_4, M_5, M_6, M_7 et M_8.