Nom : .... **Prénom :** .... Classe :......

CORRECTION DE L'INTERROGATION N°1

On prendra soin de coller le sujet sur la copie. La note tiendra compte de la qualité de la rédaction et de l'application.

Exercice 1. (4 points)

On considère la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par :

$$v_n = \frac{n-1}{n^2+1}$$

Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$.

Exercice 2. (6 points)

Soit (u_n) une suite définie par $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = \dfrac{1+2u_n}{2+u_n}$ pour tout entier naturel n.

1. Soit $f(x) = \dfrac{1+2x}{2+x}$. Démontrer que la fonction f est strictement croissante sur $[0;+\infty[$.

   Pour $x \neq -2$:

$$f'(x) = \frac{(1+2x)'(2+x)-(1+2x)(2+x)'}{(2+x)^2} = \frac{2(2+x)-(1+2x)}{(2+x)^2} = \frac{4+2x-1-2x}{(2+x)^2} = \frac{3}{(2+x)^2}$$

x	$-\infty$		-2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	‖	$+$	
$f(x)$		↗	‖	↗	

2. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n on a $0 \leq u_n < 1$.

   Notons $\mathscr{P}(n) : 0 \leq u_n < 1$

   — ***Initialisation*** : Montrons que $\mathscr{P}$ est vraie au rang 0.
   On sait que $u_0 = 0$ et on a bien $0 \leq 0 < 1$ donc $\mathscr{P}$ est vraie au rang 0.

   — ***Hérédité*** : Montrons que si $0 \leq u_n < 1$ alors $0 \leq u_{n+1} < 1$
   On sait que $u_{n+1} = \dfrac{1+2u_n}{2+u_n}$ et on suppose $0 \leq u_n < 1$
   On a la série d'équivalence :

$$\begin{aligned} & 0 \leq u_n < 1 \\ \Longleftrightarrow\ & f(0) \leq f(u_n) < f(1) \\ \Longleftrightarrow\ & \frac{1}{2} \leq u_{n+1} < 1 \end{aligned}$$

   donc $\mathscr{P}$ est héréditaire.

   — ***Conclusion*** : $\mathscr{P}$ est initialisée à partir du rang 0 et est héréditaire donc :

$$0 \leq u_n < 1$$

3. Démontrer que la suite (u_n) est strictement croissante. Que peut-on en déduire ?

   Notons $\mathscr{P}(n) : u_n < u_{n+1}$

   — ***Initialisation*** : Montrons que $\mathscr{P}$ est vraie au rang 0.
   On sait que $u_0 = 0$ et on a $u_1 = \dfrac{1}{2}$ donc $u_0 < u_1$ et donc $\mathscr{P}$ est vraie au rang 0.

   — ***Hérédité*** : Montrons que si $u_n < u_{n+1}$ alors $u_{n+1} < u_{n+2}$
   On sait que $u_{n+1} = \dfrac{1+2u_n}{2+u_n}$ et on suppose $u_n < u_{n+1}$
   On a la série d'équivalence :

$$\begin{aligned} & u_n < u_{n+1} \\ \Longleftrightarrow\ & f(u_n) < f(u_{n+1}) \\ \Longleftrightarrow\ & u_n < u_{n+1} \end{aligned}$$

   donc $\mathscr{P}$ est héréditaire.

— ***Conclusion*** : $\mathscr{P}$ est initialisée à partir du rang 0 et est héréditaire donc la suite (u_n) est strictement croissante.
On peut déduire du fait que (u_n) est majorée par 1 et est strictement croissante que (u_n) converge vers un réel ℓ ayant la particularité d'être inférieur ou égal à 1.

Nom : .... **Prénom :** .... Classe :......

INTERROGATION N°1

On prendra soin de coller le sujet sur la copie. La note tiendra compte de la qualité de la rédaction et de l'application.

Exercice 1. (4 points)

Soit (u_n) une suite définie pour tout entier naturel n par $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = \dfrac{u_n}{1+u_n}$

1. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n on a :

$$u_n = \frac{2}{2n+1}$$

Solution

N otons $\mathscr{P}(n)$ la propriété suivante :

$$\mathscr{P}(n) : u_n = \frac{2}{2n+1}$$

— ***Initialisation*** : Montrons que $\mathscr{P}$ est vraie pour $n = 0$.
Pour cela calculons $\dfrac{2}{2\times 0+1} = 2$ et puisque $u_0 = 2$ la propriété $\mathscr{P}$ est vraie pour $n = 0$.

— ***Hérédité*** : Montrons que si $u_n = \dfrac{2}{2n+1}$ alors $u_{n+1} = \dfrac{2}{2(n+1)+1} = \dfrac{2}{2n+3}$
Nous savons que $u_{n+1} = \dfrac{u_n}{1+u_n}$ et nous supposons que $u_n = \dfrac{2}{2n+1}$, par conséquent nous en déduisons que :

$$u_{n+1} = \frac{\frac{2}{2n+1}}{1+\frac{2}{2n+1}} = \frac{\frac{2}{2n+1}}{\frac{2n+1+2}{2n+1}} = \frac{\frac{2}{2n+1}}{\frac{2n+3}{2n+1}} = \frac{2}{2n+1}\times\frac{2n+1}{2n+3} = \frac{2}{2n+3}$$

et donc $\mathscr{P}$ est une propriété héréditaire.

— ***Conclusion*** : $\mathscr{P}$ est initialisée à partir de $n = 0$ et est héréditaire donc on a démontré par récurrence que :

$$\forall n \in \mathbb{N} : \qquad u_n = \frac{2}{2n+1}$$

2. En déduire la limite de la suite (u_n).

Solution

C omme $\lim\limits_{n\to+\infty} 2n+1 = +\infty$, on obtient par quotient :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{2}{2n+1} = 0 \Longleftrightarrow \lim_{n\to+\infty} u_n = 0$$

Exercice 2. (6 points)

On considère la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par $v_0 = 1$ et $v_{n+1} = \sqrt{v_n+3}$

1. Démontrer, par récurrence, que la suite (v_n) est croissante.

Solution

N otons $\mathscr{P}(n)$ la propriété suivante :

$$\mathscr{P}(n) : 0 < v_n \le v_{n+1}$$

— ***Initialisation*** : Montrons que $\mathscr{P}$ est vraie pour $n = 0$.
Pour cela calculons $v_1 = \sqrt{1+3} = 2$ et puisque $v_0 = 1 < 2$ la propriété $\mathscr{P}$ est vraie pour $n = 0$.

— ***Hérédité*** : Montrons que si $0 < v_n \le v_{n+1}$ alors $0 < v_{n+1} \le v_{n+2}$
Nous savons que $v_{n+1} = \sqrt{v_n+3}$ et nous supposons que $0 < v_n \le v_{n+1}$, par conséquent nous en déduisons que :

$$0 < v_n \le v_{n+1} \Longrightarrow 3 < v_n+3 \le v_{n+1}+3 \Longrightarrow \sqrt{3} < \sqrt{v_n+3} \le \sqrt{v_{n+1}+3} \Longrightarrow \sqrt{3} < v_{n+1} \le v_{n+2} \Longrightarrow 0 < v_{n+1} \le v_{n+2}$$

et donc $\mathscr{P}$ est une propriété héréditaire.

— ***Conclusion*** : $\mathscr{P}$ est initialisée à partir de $n = 0$ et est héréditaire donc on a démontré par récurrence que la suite était croissante, au passage on a aussi démontré qu'elle était minorée par 0 (obligatoire pour pouvoir appliquer la racine).

2. Démontrer que pour tout entier naturel n on a : $0 < v_n < 3$.

Solution

N otons $\mathscr{P}(n)$ la propriété suivante :

$$\mathscr{P}(n) : 0 < v_n < 3$$

— ***Initialisation*** : Montrons que $\mathscr{P}$ est vraie pour $n = 0$.
C'est évident puisque $v_0 = 1$ est compris entre 0 et 3, donc la propriété $\mathscr{P}$ est vraie pour $n = 0$.

— ***Hérédité*** : Montrons que si $0 < v_n < 3$ alors $0 < v_{n+1} < 3$
Nous savons que $v_{n+1} = \sqrt{v_n + 3}$ et nous supposons que $0 < v_n < 3$, par conséquent nous en déduisons que :

$$0 < v_n < 3 \Longrightarrow 3 < v_n + 3 < 6 \Longrightarrow \sqrt{3} < \sqrt{v_n + 3} < \sqrt{6} \Longrightarrow 0 < v_{n+1} < 3$$

et donc $\mathscr{P}$ est une propriété héréditaire.

— ***Conclusion*** : $\mathscr{P}$ est initialisée à partir de $n = 0$ et est héréditaire donc on a démontré par récurrence que la suite était minorée par 0 et majorée par 3.

Que peut-on déduire des deux résultats précédents ?

Solution

L a suite (v_n) est croissante et majorée, donc d'après le théorème de convergence monotone elle converge vers un réel ℓ qui a la particularité d'être inférieur ou égal à 3.

3. On considère une autre suite (w_n) définie par la relation $w_{n+1} = \sqrt{w_n + 3}$ de premier terme inconnue. Déterminer w_0 de telle manière à ce que la suite soit constante.

Solution

L a suite (w_n) est constante si et seulement si $w_{n+1} = w_n \Longleftrightarrow \sqrt{w_n + 3} = w_n$ pour tout entier naturel n
Premièrement on doit avoir $w_n > 0$ et deuxièmement $\sqrt{w_n + 3} = w_n \Longrightarrow w_n + 3 = w_n^2 \Longrightarrow w_n^2 - w_n - 3 = 0$
Cherchons les racines du trinôme $x^2 - x - 3$ en calculant son discriminant $\Delta = b^2 - 4ac = 1 + 12 = 13$ donc ce trinôme admet deux racines :

$$x_1 = \frac{1 - \sqrt{13}}{2} \qquad \text{et} \qquad x_2 = \frac{1 + \sqrt{13}}{2}$$

Seule $x_2 > 0$ donc pour que la suite soit constante il n'existe qu'une possibilité, celle de choisir $w_0 = x_2$.