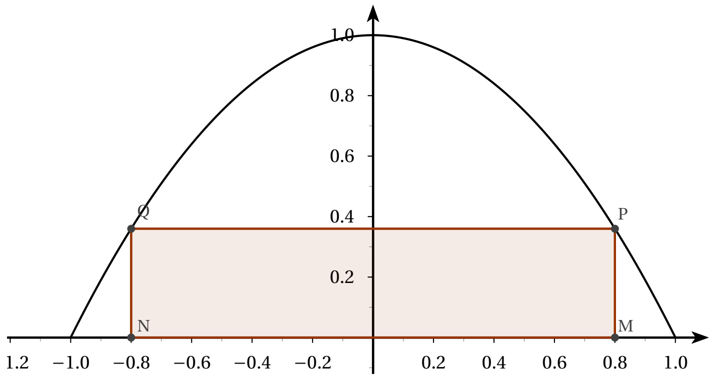
☙ TRAVAUX DE GROUPE 3 ❧
RÉGULARITÉ D'UNE COURBE

Exercice 1. On considère la fonction f définie sur $[-1;1]$ par $f(x) = 1 - x^2$ et $\mathscr{C}_f$ sa représentation graphique dans un repère orthonormal.

On inscrit le rectangle NMPQ à l'intérieur de la parabole où $\mathrm{N}(-x, 0)$, $(\mathrm{M}, (x, 0)$, $\mathrm{P}(x, f(x))$ et $\mathrm{Q}(-x, f(-x))$ comme sur la figure ci-dessous :



Quelles sont les dimensions du rectangle d'aire maximale ?

On apportera grand soin à la rédaction de la solution.

Exercice 2.

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{x^3 - 4}{x^2 + 1}$$

et on note $\mathscr{C}_f$ sa représentation graphique dans un repère orthonormal d'unité 1 cm.

PARTIE A. **etude d'une fonction auxiliaire**

On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = x^3 + 3x + 8$.

1. Dresser le tableau de variation complet de g sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet sur $\mathbb{R}$ une unique solution α dont on donnera un encadrement d'amplitude $0,1$.
3. Préciser le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x.

PARTIE B. **Retour à la fonction f.**

1. Calculer $f'(x)$ et exprimer $f'(x)$ en fonction de $g(x)$.
2. Expliquez pourquoi le signe de $f'(x)$ est le même que celui de $xg(x)$.
3. Dresser le tableau de variation complet de f sur $\mathbb{R}$.
4. Démontrer que $f(\alpha) = \dfrac{3}{2}\alpha$.

Exercice 3.

Le problème est de déterminer la distance x à laquelle on doit placer un appareil photographique pour avoir une photo de la statue de la liberté prise sous un angle θ maximal.

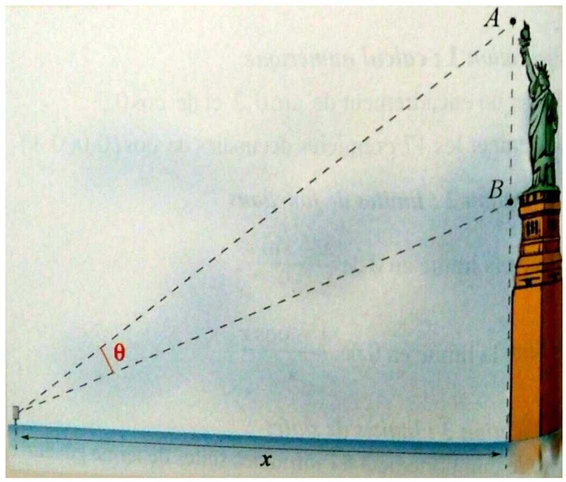
On admet que θ appartient à l'intervalle $\left]0;\frac{\pi}{2}\right[$.

Les données numériques sont les suivantes :

— l'appareil photo est à $1,5$ m du sol ;

— le piédestal a pour hauteur 45 m ;

— la statue a également pour hauteur 45 m.



Au fil de l'exercice il pourra être utile d'utiliser les formules trigonométriques suivantes :

— $\tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$;

— $(\sin x)' = \cos x$ et $(\cos x)' = -\sin x$;

— $\sin(a-b) = \sin a \cos b - \sin b \cos a$

— $cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$;

1. On considère la fonction f qui pour $0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2}$ associe $f(\alpha) = \tan\alpha$.
   (a) Dresser le tableau de variations complet de la fonction f sur $\left]0;\frac{\pi}{2}\right[$.
   (b) En déduire que θ est maximal lorsque $\tan\theta$ est maximale.
2. Démontrer la formule :
$$\tan(a-b) = \frac{\tan a - \tan b}{1 + \tan a \tan b}$$
3. (a) Exprimer θ comme la différence de deux angles a et b que l'on précisera.
   (b) A l'aide des deux questions précédentes, démontrer que :
$$\tan\theta = \frac{45x}{x^2 + 3849,75}$$
   (c) On note $g(x) = \dfrac{45x}{x^2+3849,75}$ pour $x > 0$.
   Dresser le tableau de variations complet de g sur $\mathbb{R}^+$.
   (d) Conclure.