∽ Devoir Maison 4 ∾
Les nombres complexes

Exercice 1.

On considère la suite (z_n) de nombres complexes définie pour tout entier naturel n par :

$$\begin{cases} z_0 & = & 0 \\ z_{n+1} & = & \dfrac{1}{2}\mathrm{i} \times z_n + 5 \end{cases}$$

Dans le plan rapporté à un repère orthonormé, on note M_n le point d'affixe z_n.
On considère le nombre complexe $z_\mathrm{A} = 4 + 2\mathrm{i}$ et A le point du plan d'affixe z_A.

1. Soit (u_n) la suite définie pour tout entier naturel n par $u_n = z_n - z_\mathrm{A}$.
   (a) Montrer que, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \dfrac{1}{2}\mathrm{i} \times u_n$.
   (b) Démontrer (par récurrence) que, pour tout entier naturel n :
   $$u_n = \left(\frac{1}{2}\mathrm{i}\right)^n (-4 - 2\mathrm{i}).$$
2. Démontrer que, pour tout entier naturel n, les points A, M_n et M_{n+4} sont alignés.
   Indication : On pourra vérifier que les vecteurs $\overrightarrow{\mathrm{AM}_n}$ *et* $\overrightarrow{\mathrm{AM}_{n+4}}$ *sont colinéaires (en utilisant leurs coordonnées)*

Exercice 2.

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(\mathrm{O}; \vec{u}, \vec{v})$.
On considère le point A d'affixe 4, le point B d'affixe $4i$ et les points C et D tels que ABCD est un carré de centre O.
Pour tout entier naturel non nul n, on appelle M_n le point d'affixe $z_n = (1+i)^n$.

1. Démontrer que $\mathrm{OM}_n = \sqrt{2}^n$ pour tout entier naturel n.
2. Montrer qu'il existe un entier n_0 tel que le point M_n se situe en dehors du carré ABCD pour tout entier naturel $n \geq n_0$.