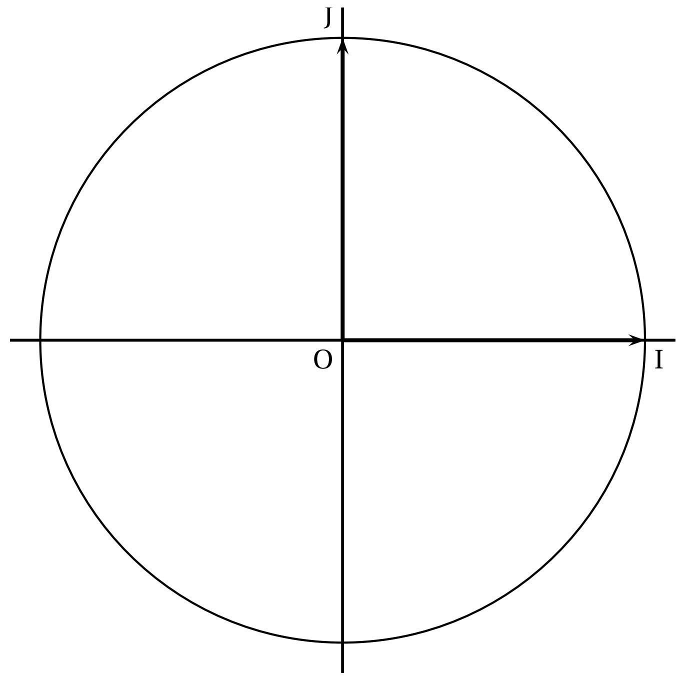
I) Rappels

I.1. Angles remarquables

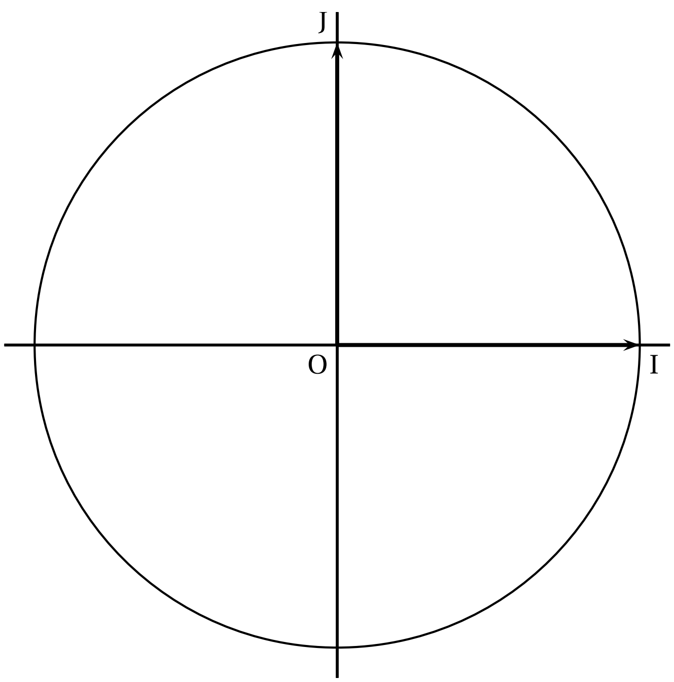
Dans le plan muni d'un repère (O ; I ; J), on a tracé le cercle trigonométrique $\mathscr{C}$ (de centre O et de rayon 1, muni du sens direct).

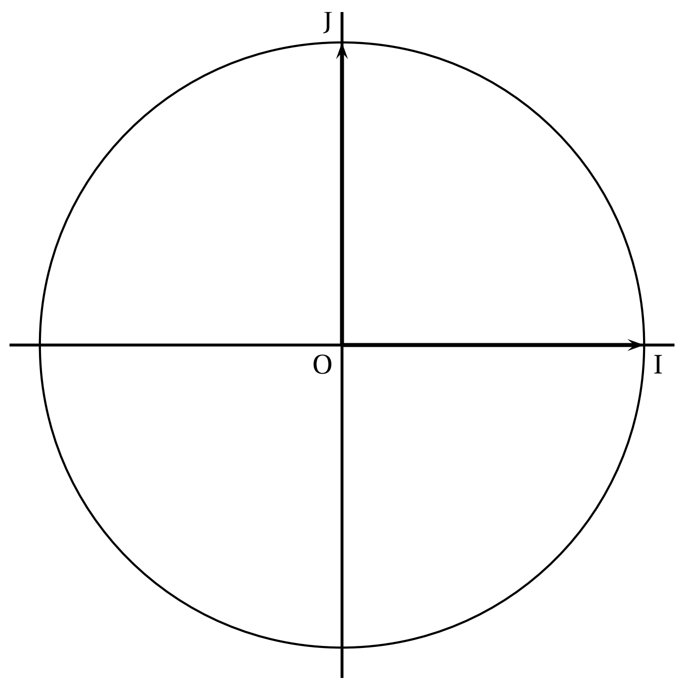


1. Construire au compas sur le «premier» cercle $\mathscr{C}$ les points :
   - A tel que $\left(\overrightarrow{OI};\overrightarrow{OA}\right)=\dfrac{\pi}{3}$
   - B tel que $\left(\overrightarrow{OI};\overrightarrow{OB}\right)=-\dfrac{\pi}{3}$
   - C tel que $\left(\overrightarrow{OI};\overrightarrow{OC}\right)=\pi-\dfrac{\pi}{3}=\ldots$
   - D tel que $\left(\overrightarrow{OI};\overrightarrow{OD}\right)=\pi+\dfrac{\pi}{3}=\ldots$

2. Même question sur le «deuxième» cercle $\mathscr{C}$ en prenant $\dfrac{\pi}{4}$ comme angle de référence, puis $\dfrac{\pi}{6}$ sur le «troisième» cercle $\mathscr{C}$.

3. Sur chacun des cercles, déterminer les valeurs des abscisses et des ordonnées de chacun des points.





Applications (Constructions à la règle et au compas, angles remarquables) :

Dans un repère orthonormé $\left(O, \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath}\right)$, placer à la règle et au compas les points suivants :

$$A\left(1;\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\qquad B(2;-\sqrt{3})\qquad C\left(\frac{\sqrt{3}}{4};-1\right)\qquad D\left(3-\frac{\sqrt{2}}{2};\frac{1}{2}\right)$$

Dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$, on considère deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ unitaires, tels que : $(\vec{i}; \vec{u}) = a$ et $(\vec{i}; \vec{v}) = b$

1. Démontrons tout d'abord ($\star$).

 a. Faire le schéma d'un cercle trigonométrique, muni d'un repère $(O; \vec{i}; \vec{j})$, et dessiner deux représentants des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ayant pour origine O, avec $a > b$.

 b. Déterminer $(\vec{u}; \vec{v})$ en fonction de a et b.

 c. En déduire que $\vec{u}.\vec{v} = \cos(a - b)$.

 d. Préciser les coordonnées de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ en fonction de a et b.

 e. En déduire que $\vec{u}.\vec{v} = \cos a \cos b + \sin a \sin b$.

 f. Conclure.

2. Grâce à la configuration du rectangle dans le cercle trigonométrique, retrouver les trois formules suivantes de la propriété ci-dessus.

3. Utiliser désormais ($\star$) pour retrouver les formules de duplication.

Dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$, on considère deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ unitaires, tels que : $(\vec{i}; \vec{u}) = a$ et $(\vec{i}; \vec{v}) = b$

1. Démontrons tout d'abord ($\star$).

 a. Faire le schéma d'un cercle trigonométrique, muni d'un repère $(O; \vec{i}; \vec{j})$, et dessiner deux représentants des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ayant pour origine O, avec $a > b$.

 b. Déterminer $(\vec{u}; \vec{v})$ en fonction de a et b.

 c. En déduire que $\vec{u}.\vec{v} = \cos(a - b)$.

 d. Préciser les coordonnées de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ en fonction de a et b.

 e. En déduire que $\vec{u}.\vec{v} = \cos a \cos b + \sin a \sin b$.

 f. Conclure.

2. Grâce à la configuration du rectangle dans le cercle trigonométrique, retrouver les trois formules suivantes de la propriété ci-dessus.

3. Utiliser désormais ($\star$) pour retrouver les formules de duplication.

Dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$, on considère deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ unitaires, tels que : $(\vec{i}; \vec{u}) = a$ et $(\vec{i}; \vec{v}) = b$

1. Démontrons tout d'abord ($\star$).

 a. Faire le schéma d'un cercle trigonométrique, muni d'un repère $(O; \vec{i}; \vec{j})$, et dessiner deux représentants des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ayant pour origine O, avec $a > b$.

 b. Déterminer $(\vec{u}; \vec{v})$ en fonction de a et b.

 c. En déduire que $\vec{u}.\vec{v} = \cos(a - b)$.

 d. Préciser les coordonnées de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ en fonction de a et b.

 e. En déduire que $\vec{u}.\vec{v} = \cos a \cos b + \sin a \sin b$.

 f. Conclure.

2. Grâce à la configuration du rectangle dans le cercle trigonométrique, retrouver les trois formules suivantes de la propriété ci-dessus.

3. Utiliser désormais ($\star$) pour retrouver les formules de duplication.

Travail de l'élève 1 : *On utilise le logiciel Géogébra. La figure peut être vidéo-projetée*

1. **Figure de base**
   - **a.** Ouvrir Géogébra et faire afficher le repère orthonormé $(O; I; J)$.
   - **b.** Choisir le radian comme unité d'angle dans "Options", "Configuration", "Avancé"
   - **c.** Tracer le cercle trigonométrique de centre O.
   - **d.** Créer un curseur t, variant entre -13 et 13 et d'incrémentation 0.05.
   - **e.** Dans la ligne de commande, saisir l'instruction suivante : $M = (1; t)$
     A votre avis, que signifie cette commande ? *Vous pouvez déplacer le curseur pour vous aider*
   - **f.** Dans la ligne de commande, saisir l'instruction $A = (x(M), 0)$
     A votre avis, que signifie cette commande ? *Vous pouvez déplacer le curseur pour vous aider*
   - **g.** Créer le point $B(0, y_M)$
2. **Variations**
   - **a.** Quelle est l'abscisse du point M dans le repère $(O; I; J)$? Son ordonnée ?
   - **b.** Avec le curseur, déplacer le point M.
     Décrire son trajet, ainsi que ceux de A et de B correspondants.
   - **c.** En déduire graphiquement les tableaux de variations des fonctions sinus et cosinus pour $t \in [-13; 13]$.
     On précisera de plus les valeurs où ces fonctions s'annulent.
3. **Courbes représentatives**
   - **a.** Compléter la figure précédente en créant le point $C(t, x_M)$.
   - **b.** Faire afficher sa trace. Quelle courbe représentative voit-on se dessiner ?
   - **c.** Faire de même pour le point $S(t, y_M)$. Quelle courbe représentative voit-on se dessiner ?
   - **d.** Vérifier la cohérence entre les courbes obtenues et vos tableaux.
4. **Propriétés**
   - **a.** Quelles propriétés constatez-vous pour les deux courbes ? Pouvez-vous la justifier ?
   - **b.** Quelle symétrie observez-vous pour la courbe représentative de la fonction cosinus ? Pouvez-vous la justifier ?
     Connaissez-vous d'autres fonctions de référence possédant cette propriété ?
   - **c.** Quelle symétrie observez-vous pour la courbe représentative de la fonction sinus ? Pouvez-vous la justifier ?
     Connaissez-vous d'autres fonctions de référence possédant cette propriété ?