Exercices
Fonctions de référence 2

Exercice 1 :
La capacité pulmonaire d'une personne est la quantité d'air (mesurée en litres) pouvant être inspirée. Dans le cas d'une inspiration forcée, à partir de 10 ans, la capacité pulmonaire (en litres) d'une personne peut être modélisée en fonction de son âge x (en années) par la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{110(\ln x - 2)}{x}$

On appelle $(\mathscr{C})$ la courbe représentative de la fonction f sur l'intervalle $[10\,;\,100]$ dans un repère orthogonal. La tracer sur votre calculatrice puis, avec éventuellement un tableau de valeurs :

1. Estimer à quel âge la capacité pulmonaire est maximale puis donner cette capacité à 10^{-2} près.
2. Estimer l'âge à partir duquel un adulte a une capacité pulmonaire inférieure à celle d'un enfant de 10 ans ?
3. Dresser le tableau de variation de la fonction f sur l'intervalle $[10\,;\,100]$.
4. Déterminer la valeur arrondie à 10^{-2} près du maximum de f.

Exercice 2 : On considère un enfant dont le poids à la naissance est 3 kg.
Pendant les trois premières années de la vie de l'enfant, on estime que son poids (en kg) est donné en fonction de son âge x (en année) par $f(x) = x + 4\ln(3x+1) + 3$.

1. Calculer le poids de cet enfant à l'âge de 6 mois. On donnera une valeur arrondie au dixième.
2. Déterminer graphiquement, avec la précision permise par le graphique, l'âge correspondant à un poids de 12 kg.

Exercice 3 : La température T, en degré Celsius, d'une réaction chimique à l'instant t est donnée par $\mathrm{T}(t) = (20t+10)e^{-0.5t}$

1. Donner l'ensemble de définition de cette fonction.
2. Donner la température initiale.
3. Dresser graphiquement le tableau de variation de T.
4. A l'aide de votre calculatrice, déterminer au bout de combien de temps la température redescend à sa valeur initiale.

Exercice 4 : On suppose qu'un pont suspendu suit une courbe d'une fonction f définie sur $[-180\,;\,180]$ par $f(x) = e^{\frac{x}{41}} + e^{-\frac{x}{41}}$.
On considère le point A de coordonnées $(180\,;\,0)$. Ce point A représente le pied du deuxième pylône.

1. A l'aide de votre calculatrice, dresser le tableau de variations de f.
2. Quelle est la hauteur du pylône AB, B représentant le haut du deuxième pylône ?

Exercice 5 : L'iode 131 est un produit radioactif qui diminue par désintégration. Au bout du temps t, exprimé en jours, la masse en grammes est $\mathrm{M}(t) = 100 \times 0{,}917^t$..

1. Calculer la dérivée de M et dresser son tableau de variations sur $[0\,;\,+\infty[$.
2. Résoudre $\mathrm{M}(t) = 50$ sur $[0\,;\,+\infty[$.
3. Au bout de combien de jours sa masse a-t-elle diminué de moitié (ce résultat s'appelle le temps de demi-vie) ?

Exercice 6 :

On lâche à partir du sol un ballon atmosphérique.

Pour prédire la hauteur, exprimée en mètres, atteinte par le ballon lorsque s'est écoulé un temps t, exprimé en minutes, à partir de son lâcher, un physicien a proposé la fonction h définie par

$$h(t) = 1\,200\left(1 - \mathrm{e}^{-0,1t}\right).$$

Lors d'un lâcher par temps calme du ballon, une mesure fournit, minute après minute, la hauteur de ce ballon.

Les résultats sont les suivants :

temps écoulé en minutes	3	9	15	25	40
hauteur mesurée en mètres	302	703	896	1 082	1 143

1. On veut vérifier si la formule théorique est compatible avec les mesures effectuées.

On appelle :

- *écart absolu* : la différence entre la valeur calculée avec la fonction h et la valeur mesurée .
- *écart relatif* : le quotient de l'écart absolu par la valeur mesurée.

On considère que la fonction h, est acceptable si, pour chacune des cinq mesures effectuées, l'écart relatif est compris entre $-5\,\%$ et $+5\,\%$.

a. Compléter le tableau ci-dessous, en arrondissant à l'unité les hauteurs et au dixième de pourcent les écarts relatifs.

temps écoulé en minutes	3	9	15	25	40
hauteur mesurée en mètres	302	703	896	1 082	1 143
$h(t)$	311	712	932		
écart absolu	9	9		19	
écart relatif	3,0 %			1,8 %	

b. La fonction h est-elle acceptable ?

2. Étude de la fonction h sur l'intervalle $[3\,;\,60]$.

a. Établir graphjiquement le tableau de variation de h. On fera figurer les images de 3 et de 60 dans le tableau.

b. À l'aide du tableau de variation, indiquer si les équations suivantes ont une solution dans l'intervalle $[3\,;\,60]$. On justifiera la réponse.

(1) $h(t) = 500$ (2) $h(t) = 1\,200$

c. Déterminer le temps nécessaire au ballon pour atteindre la hauteur de 1 000 m, en considérant que cette hauteur est donnée par la fonction h. *On arrondira le résultat à la minute.*

Exercice 7 : Des études statistiques montrent que, pour des intensités acoustiques et des fréquences moyennes, la sensation perçue par l'oreille humaine varie approximativement comme le logarithme de l'intensité acoustique.
Le niveau sonore L d'un son, en décibel (dB), est donné en fonction de l'intensité acoustique I, en watt par mètre carré (w/m^2), par la relation

$$\mathrm{L} = 10\log\frac{\mathrm{I}}{10^{-12}}$$

Le seuil d'audibilité $\mathrm{L}=0$ est obtenu par $\mathrm{I}=10^{-12}$ w/m^2.
Le seuil de douleur (seuil maximum supportable par l'oreille) est $\mathrm{L}=130$ dB.
On se propose d'installer des éoliennes à 2000m d'une zone d'habitations.
A cette distance, le niveau sonore d'une éolienne est $\mathrm{L}_1 = 20$ dB.

1. Calculer l'intensité acoustique I_1 en w/m^2 correspondant à l'installation d'une éolienne.
2. Si on installe n éoliennes, l'intensité acoustique correspondante est, en w/m^2, $\mathrm{I}_n = n\mathrm{I}_1$
   Montrer que le niveau sonore obtenu L_n, en dB, est $\mathrm{L}_n = 20 + 10\log(n)$
3. On souhaite que le niveau sonore obtenu ne dépasse pas 30 dB.
   Quel est le nombre maximum d'éoliennes que l'on peut installer ?

Exercice 8 :

Dans cet exercice, la température est exprimée en degrés Celsius (°C) et le temps t est exprimé en heures.

Une entreprise congèle des ailerons de poulet dans un tunnel de congélation avant de les conditionner en sachets. À l'instant $t=0$, les ailerons, à une température de 5 °C, sont placés dans le tunnel. Pour pouvoir respecter la chaîne du froid, le cahier des charges impose que les ailerons aient une température inférieure ou égale à -24 °C.

PARTIE A

La température des ailerons dans le tunnel de congélation est modélisée en fonction du temps t par la fonction f définie sur l'intervalle $[0,+\infty[$ par $f(t) = 35\mathrm{e}^{-1,6t} - 30$.

1. Déterminer la température atteinte par les ailerons au bout de 30 minutes.
2. Dresser graphiquement le tableau de variations de la fonction f.
3. Si les ailerons de poulet sont laissés une heure et demie dans le tunnel de congélation, la température des ailerons sera-t-elle conforme au cahier des charges ?
4. Résoudre par le calcul l'équation $f(t) = -24$ et interpréter le résultat trouvé.

PARTIE B

Pour moderniser son matériel, l'entreprise a investi dans un nouveau tunnel de congélation.

La température des ailerons dans ce nouveau tunnel est modélisée, en fonction du temps, par la fonction g définie sur l'intervalle $[0,+\infty[$, par $g(t) = 40\mathrm{e}^{-1,5t} - 35$.

1. Justifier que $g(0) = 5$ et vérifier ce résultat par le calcul.
2. Ce nouveau tunnel permet-il une congélation plus rapide ?

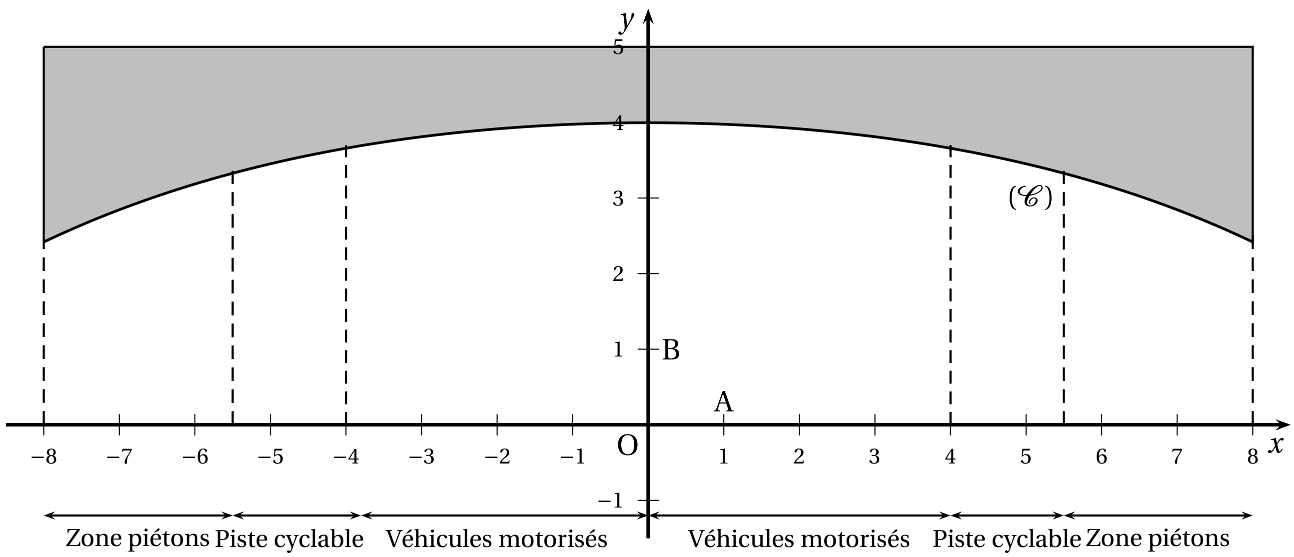
Exercice 9 :

Un pont à une seule arche d'une longueur de 16 m enjambe une route à double circulation.

La figure ci-dessous donne une vue de l'une des deux façades de ce pont (1 unité représente 1 mètre).

La partie supérieure du pont est à une hauteur de 5 m au-dessus de la route.

La partie de l'axe des abscisses comprise entre -8 et 8 représente la chaussée sur laquelle sont délimitées les zones de circulation des piétons, des cyclistes et des véhicules motorisés.



A– Étude de la fonction représentée par la courbe($\mathscr{C}$)

Soit la fonction f définie, pour tout réel x de l'intervalle $[-8\ ;\ 8]$, par

$$f(x) = k - 0,5\left(\mathrm{e}^{0,2x} + \mathrm{e}^{-0,2x}\right) \quad \text{où } k \text{ désigne un entier naturel fixé.}$$

On note ($\mathscr{C}$) sa courbe représentative, donnée ci-dessus dans le repère orthonormé (O, A, B).

1. Déterminer graphiquement $f(0)$. En déduire que pour tout réel x de l'intervalle $[-8\ ;\ 8]$:

$$f(x) = 5 - 0,5\left(\mathrm{e}^{0,2x} + \mathrm{e}^{-0,2x}\right).$$

2. En tenant compte du fait que l'on doit laisser une hauteur de sécurité de 50 cm, quelle doit être la hauteur maximale exprimée en mètre d'un véhicule motorisé pour qu'il puisse passer sous le pont ? On arrondira le résultat à 10^{-1}.
3. Dresser graphiquement le tableau de variation de f sur $[-8\ ;\ 8]$.

B– Calculs d'aires

La façade du pont est la partie grisée représentée sur la figure précédente. Son aire exprimée en m^2 vaut $5\left(\mathrm{e}^{1,6} - \mathrm{e}^{-1,6}\right)$.

1. On veut peindre les deux façades du pont. En déduire l'aire S exprimée en m^2 de la surface totale à peindre ; en donner une valeur en m^2 approchée à 10^{-2} près.
2. La peinture utilisée pour peindre les façades du pont est vendue par bidon de 5 litres.
   Sachant que cette peinture a une propriété de recouvrement de 3 m^2 par litre, combien de bidons sont nécessaires pour recouvrir les deux faces de cette construction ?