COURS
FONCTIONS DE RÉFÉRENCE 2

I) Les fonctions trigonométriques

Le cercle trigonométrique
Les fonctions cos et sin : périodicité, tableaux de variations, courbes et symétrie
Valeurs remarquables + Configuration du rectangle ?
Résolutions d'équations trigonométriques sur des exemples “concrets” : exos 48-50-51-52 p 65 du livre
Intervalle de 1STI2D

II) Les fonction logarithmes

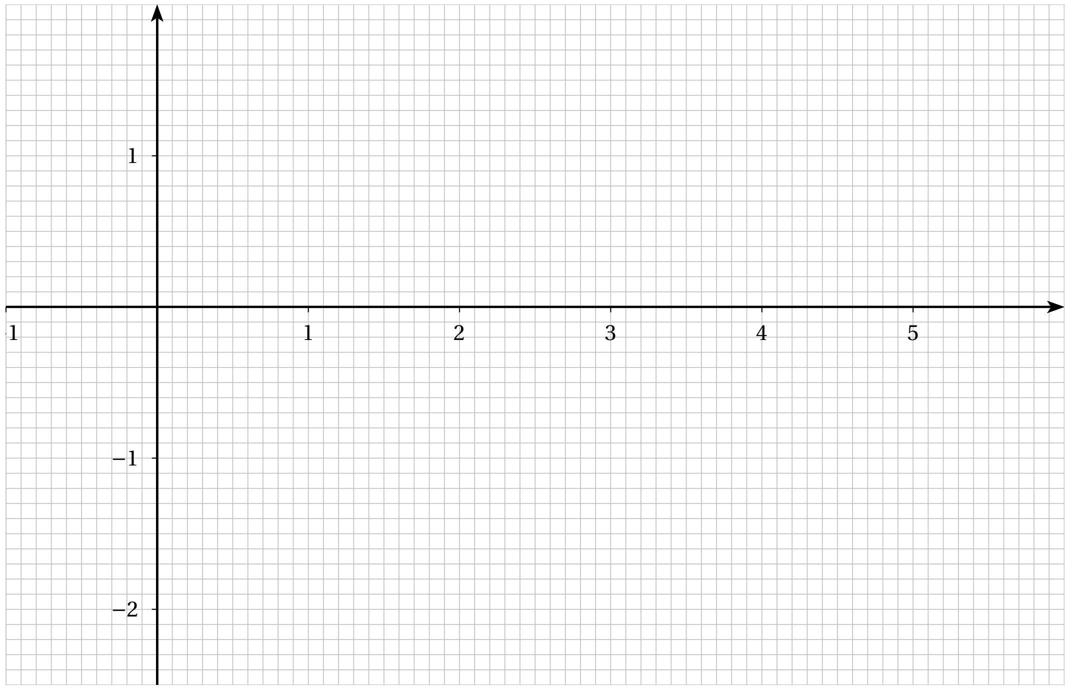
II.1. La fonction ln

Travail de l'élève 1 : Votre calculatrice possède une touche ln pour calculer l'image d'un nombre par la fonction appelé « logarithme népérien » (du nom de John Napier, XVIII^e qui découvrit les fonctions logarithmes).

1. Vérifiez que $\ln(5) \simeq 1.609$
2. Testez la fonction ln avec un nombre négatif de votre choix. Que constatez-vous ?
3. Observez la représentation graphique de la fonction ln sur votre calculatrice puis conjecturez graphiquement les réponses aux questions suivantes :
   - **a.** Quel est l'ensemble de définition de la fonction ln ?
   - **b.** Quel est le sens de variation de la fonction ln ?
     En déduire le signe de sa fonction dérivée.
4. **a.** Avec le tableau de valeurs de votre calculatrice, compléter le tableau suivant :

x	0,1	0,2	0,5	1	2	3	4	5
$\ln(x)$								
$\dfrac{1}{x}$								

   - **b.** Dans le repère ci-dessous, placer les points de coordonnées $\big(x\,;\,\ln(x)\big)$ obtenus et tracer l'allure de la représentation graphique $\mathscr{C}$ de la fonction ln.
   - **c.** Sur ce même graphique, tracer les droites passant par les points de coordonnées $\big(x\,;\,\ln(x)\big)$ et de coefficient directeur $\dfrac{1}{x}$.
   - **d.** Que représentent ces droites pour la courbe $\mathscr{C}$?
   - **e.** On rappelle que le nombre dérivé d'une fonction f en un réel x est le coefficient directeur de la tangente à la courbe représentant f au point d'abscisse x.
     Quelle conjecture peut-on faire entre la fonction ln et la fonction inverse sur $]0\,;\,+\infty[$?
   - **f.** D'après la courbe représentative de la fonction ln, quelles semblent être les limites de cette fonction aux bornes de son ensemble de définition ?



g. Compléter alors le tableau suivant :

x	0 $\qquad\qquad\qquad\qquad$ $+\infty$
Signe de $\dfrac{1}{x}$	
Variation de ln	
Signe de $\ln(x)$	

Définition 1.

On appelle fonction logarithme népérien, notée ln, la fonction définie sur $]0;+\infty[$ qui a pour fonction dérivée la fonction inverse et qui s'annule pour $x = 1$.
Ainsi, la fonction ln est définie et dérivable sur $]0;+\infty[$ et pour tout $x > 0$ on a

$$\big(\ln(x)\big)' = \frac{1}{x} \quad \text{et} \quad \ln(1) = 0$$

Remarques :

- ⇝ Ainsi chaque nombre de $]-\infty;+\infty[$ possède un unique antécédent par la fonction ln.
- ⇝ De plus, si a et b sont des réels positifs, alors :

$$\ln(a) = \ln(b) \iff a = b$$

$$\ln(a) < \ln(b) \iff a < b$$

$$\ln(a) > \ln(b) \iff a > b$$

En particulier $\ln(x) < 0 \iff 0 < x < 1$ et $\ln(x) > 0 \iff x > 1$

Exemples :

$\ln(3x+4) = 0 \iff 3x+4 = 1 \iff 3x = -3 \iff x = -1$
$\ln(x-3) > 0 \iff x-3 > 1 \iff x > 4$
$\ln(x^2) = \ln(4) \iff x^2 = 4 \iff x = 2$ ou $x = -2$
$\ln(x^2-3) = \ln(2x) \iff x^2-3 = 2x \iff x^2-2x-3 = 0 \iff \ldots \iff x = -1$ ou $x = 3$
Attention ! Vérifier que $x^2 - 3 > 0$ pour les deux solutions !

$\ln(x+3) > \ln(2x)$ ...

II.2. Propriétés algébriques des logarithmes

Travail de l'élève 2 : Compléter un tableau de valeurs de la fonction ln et tenter de trouver la relation $\ln(a \times b) = \ln(a) + \ln(b)$.
Parler du côté historique : avant l'apparition de la calculatrice, on se servait de cette formule et de tables de logarithmes pour obtenir le résultat des multiplications de nombres écrits avec "beaucoup" de chiffres, puisque l'on transformait ces multiplications en additions, bien plus simples à faire à la main.

Théorème 1.

La fonction ln transforme les produits en sommes, ie pour tout $a > 0$ et $b > 0$ on a :

$$\ln(ab) = \ln(a) + \ln(b)$$

Exemple :

$\ln(6) = \ln(2) + \ln(3)$

Remarque : Les fonctions qui possèdent cette propriétés sont toutes appelées "Logarithmes", d'où la précision "Népérien" pour celui qui nous a intéressé pour l'instant.

Corollaire 1.

Pour tous a et b strictement positif et pour $n \in \mathbb{Z}$ on a :

1. $\ln\left(\frac{1}{b}\right) = -\ln b$
2. $\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln a - \ln b$
3. $\ln\left(a^n\right) = n\ln(a)$
4. $\ln\left(\sqrt{a}\right) = \frac{1}{2}\ln a$

Exemples :

$\ln\left(\frac{1}{2}\right) = -\ln(2)$, $\ln(8) = 3\ln(2)$, $\ln(64) = \ln(2^6) = 6\ln(2)$ et $\ln(0.01) = -2\ln(10)$

Application : Résoudre $(1.07)^n \geq 2$ et $\ln(0.8^n) \geq 0.3$

Exercice 1 : Résoudre $(0.9)^n \leq 0.5$ et $\ln(1.2^n) \geq 15$

II.3. Le nombre e

Travail de l'élève 3 :

1. Combien de solutions l'équation $\ln(x) = 1$ possède-t-elle ? Pourquoi ?
2. En utilisant un tableau de valeurs à la calculatrice, résoudre cette équation à 10^{-3} près.
3. Votre calculatrice contient également une touche e^x.
   a. Calculer $\ln(e^1)$.
   b. En déduire la valeur de e^1 à 10^{-3} près puis vérifier à la calculatrice.

Définition 2.

On appelle e l'unique antécédent de 1 : $\ln(e) = 1$. Pour information $e \simeq 2.718$.

Remarque : Ainsi, on peut aussi dire que ln est la fonction logarithme en base e pour la différencier des autres fonctions Logarithmes.

Exemples :

Résoudre les (in)équations suivantes :

$\ln(3x+4) = 1 \iff 3x+4 = e \iff 3x = e-4 \iff x = \frac{e-4}{3}$

$\ln(1-x) > 1 \iff 1-x > e \iff 1-e > x$

II.4. Les fonctions Logarithmes en base a, avec $a > 0$

Travail de l'élève 4 : En fait, la fonction logarithme népérien n'est pas la seule à transformer les produits en sommes.
Toutes les fonctions logarithmes le font, en particulier la fonction logarithme décimal, notée Log, définie sur $]0;+\infty[$ par $\text{Log} : x \longmapsto \frac{\ln(x)}{\ln(10)}$.
Faire un tableau de valeur pour observer cela avec les puissance de 10, faire observer sa courbe à la TI

Définition 3.

Les fonctions logarithmes en base a ...

Propriété 1.

les mêmes propriétés algébriques que ln

Exemple :

Des études statistiques montrent que, pour des intensités acoustiques et des fréquences moyennes, la sensation perçue par l'oreille humaine varie approximativement comme le logarithme de l'intensité acoustique.
Le niveau sonore L d'un son, en décibel (dB), est donné en fonction de l'intensité acoustique I, en watt par mètre carré ($\mathrm{w/m^2}$), par la relation

$$\mathrm{L} = 10\log\frac{\mathrm{I}}{10^{-12}}$$

Le seuil d'audibilité $\mathrm{L} = 0$ est obtenu par $\mathrm{I} = 10^{-12}\ \mathrm{w/m^2}$.
Le seuil de douleur (seuil maximum supportable par l'oreille) est $\mathrm{L} = 130$ dB.
On se propose d'installer des éoliennes à 2000m d'une zone d'habitations.
A cette distance, le niveau sonore d'une éolienne est $\mathrm{L_1} = 20$ dB.

1. Calculer l'intensité acoustique $\mathrm{I_1}$ en $\mathrm{w/m^2}$ correspondant à l'installation d'une éolienne.
2. Si on installe n éoliennes, l'intensité acoustique correspondante est, en $\mathrm{w/m^2}$, $\mathrm{I}_n = n\mathrm{I}_1$
   Montrer que le niveau sonore obtenu L_n, en dB, est $\mathrm{L}_n = 20 + 10\log(n)$
3. On souhaite que le niveau sonore obtenu ne dépasse pas 30 dB.
   Quel est le nombre maximum d'éoliennes que l'on peut installer ?

Exemple :

Le pH d'un solution dépend de la concentration $[\mathrm{H_3O^+}]$ en ions hydronium $\mathrm{H_3O^+}$: $p\mathrm{H} = -\log[\mathrm{H_3O^+}]$; (concentration : nombre de moles présentes dans un litre de solution).
Si pH<7, la solution est acide ; si pH=7, la solution est neutre ; si ph>7, la solution est basique.

1. Une solution A a une concentration molaire en ions $\mathrm{H_3O^+}$ égale à 3.2×10^{-7} mol/L/
   Calculer son pH. Est-elle acide ou basique ?
2. Le pH d'une solution basique est de 9. Calculer la concentration molaire en ions $\mathrm{H_3O^+}$ de cette solution.

Exercice(s) du livre : Foucher Analyse : 53-54-55-56 p 86

III) Les fonctions exponentielles

III.1. Définition

En généralisant la démarche qui nous a permis d'introduire le nombre e, on peut montrer que pour tout nombre réel a, il existe un unique nombre $b > 0$ tel que $\ln(b) = a$.
Ainsi pour $a = 1$, on a $b = e$.
Pour $a = 2$? Notons que $\ln(e^2) = 2\ln(e) = 2 \times 1 = 2$. Donc $b = e^2$ convient.
Pour $a = 3$, $a = -1$, ...

Définition 4. (Proposition)

Pour tout nombre réel x et pour tout nombre réel strictement positif y,

$$y = e^x \iff x = \ln(y)$$

Remarques :

- ⇝ Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $e^x > 0$
- ⇝ Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\ln(e^x) = x$
- ⇝ Pour tout $x \in \mathbb{R}^{+*}$, $e^{\ln(x)} = x$

Définition 5.

La fonction **exponentielle**, notée exp, définie sur $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}^{+*}$ est la fonction qui à tout nombre réel x associe le nombre e^x .

III.2. Propriétés

Théorème 2.

La fonction exponentielle transforme les sommes en produits, ie pour tous nombres réels a et b, on a :

$$e^{a+b} = e^a \times e^b$$

Corollaire 2.

Pour tous nombres réels a et b, on a :

$$e^{-a} = \frac{1}{e^a} \qquad \text{et} \qquad e^{a-b} = \frac{e^a}{e^b}$$

Et pour tout nombre réel a et pour tout entier relatif n on a $\left(e^a\right)^n = e^{na}$

Remarque : Résultats que vous connaissiez déjà sur les puissances entières.

III.3. Courbe et variations

III.4. Le nombre a^b

Définition 6.

Soit $a > 0$ et b un nombre réel.
On définit le nombre a^b par $a^b = e^{b\ln(a)}$.
La fonction exponentielle de base a est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ et qui à x associe $a^x = e^{x\ln(a)}$

III.5. Les fonctions puissances

Définition 7.

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$.
On appelle fonction "puissance α" la fonction définie sur $]0\,;\,+\infty[$ et qui à x associe $x^\alpha = e^{\alpha\ln(x)}$

Exemple :

Si $\alpha = \dfrac{1}{2}$ alors on retrouve la fonction racine carrée.

Exercice(s) du livre : Foucher Analyse : 50-51-52 p 85

charlotte.auperin@ac-montpellier.fr