Tutorat-séance 5

Objectifs :

1. Interprétation géométrique du quotient de deux nombres complexes
2. Connaître et utiliser la forme complexe des translations, rotations et homothéties

Exercice 1.

1. Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$.
   On pose $a = 3,\ b = 5 - 2\mathrm{i}$ et $c = 5 + 2\mathrm{i}$. On désigne par A, B et C les points d'affixes respectives $a,\ b$ et c.
   Soit M un point d'affixe z du plan, distinct des points A et B.
   (a) Montrer que ABC est un triangle rectangle isocèle.
   (b) Donner une interprétation géométrique de l'argument du nombre complexe $\dfrac{z-3}{z-5+2\mathrm{i}}$.
   (c) Déterminer alors l'ensemble des points M d'affixe z tels que $\dfrac{z-3}{z-5+2\mathrm{i}}$ soit un nombre réel strictement négatif.
2. Soit Γ le cercle circonscrit au triangle ABC et Ω le point d'affixe $2 - \mathrm{i}$.
   (a) Donner l'écriture complexe de la rotation r de centre Ω et d'angle $-\dfrac{\pi}{2}$.
   (b) Déterminer l'image Γ' de Γ par la rotation r. Déterminer une équation paramétrique de Γ'.

Eléments de correction (Exercice 1)

---

1. (a) On a $c - a = 2 + 2\mathrm{i}$ et $b - a = 2 - 2\mathrm{i}$; or $c - a = 2 + 2\mathrm{i} = \mathrm{i}(2 - 2\mathrm{i}) = \mathrm{i}(b - a)$. Cette égalité signifie que C est l'image de B dans le quart de tour direct de centre A. Donc le triangle ABC est rectangle en A.
   (b) On a $\dfrac{z-3}{z-5+2\mathrm{i}} = \dfrac{z-z_{\mathrm{A}}}{z-z_{\mathrm{B}}}$. Donc $\arg\left(\dfrac{z-3}{z-5+2\mathrm{i}}\right) = \left(\overrightarrow{\mathrm{A}M},\ \overrightarrow{\mathrm{B}M}\right)$
   (c) Le nombre $\dfrac{z-3}{z-5+2\mathrm{i}}$ est un réel strictement négatif si et seulement si l'un des ses arguments est égal à π. D'après le b, on a donc $\dfrac{z-3}{z-5+2\mathrm{i}} \in \mathbb{R}^- \iff \left(\overrightarrow{\mathrm{A}M},\ \overrightarrow{\mathrm{B}M}\right) = \pi \quad [2\pi] \iff M \in]\mathrm{AB}[$.
   L'ensemble cherché est donc le segment ouvert $]\mathrm{AB}[$.
2. (a) Si z' est l'affixe du point image du point d'affixe z dans la rotation r de centre Ω et d'angle $-\dfrac{\pi}{2}$, cette affixe vérifie $z' - \omega = -\mathrm{i}\,(z - \omega) \iff$
   $z' = -\mathrm{i}z + \omega(1 + \mathrm{i}) \iff z' = z' = -\mathrm{i}z + (2 - \mathrm{i})(1 + \mathrm{i}) \iff \boxed{z' = -\mathrm{i}z + 3 + \mathrm{i}}$.
   (b) ABC étant rectangle isocèle en A, le centre E du cercle circonscrit Γ est le milieu de [BC] d'affixe 5 et son rayon est égal à 2.
   Une rotation est une isométrie donc l'image du cercle Γ est le cercle Γ' dont le centre est E$'$, image de E par r et de même rayon 2.
   On a alors : $z_{\mathrm{E}'} = z'_{\mathrm{E}} = -\mathrm{i}z_{\mathrm{E}} + 3 + \mathrm{i} = -5\mathrm{i} + 3 + \mathrm{i} = 3 - 4\mathrm{i}$.
   Une équation paramétrique de Γ' est alors : $z - z_{E'} = 2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}, \theta \in [0\ ;\ 2\pi[$ donc : $\boxed{z = 3 - 4\mathrm{i} + 2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta},\ \theta \in [0\ ;\ 2\pi[}$.

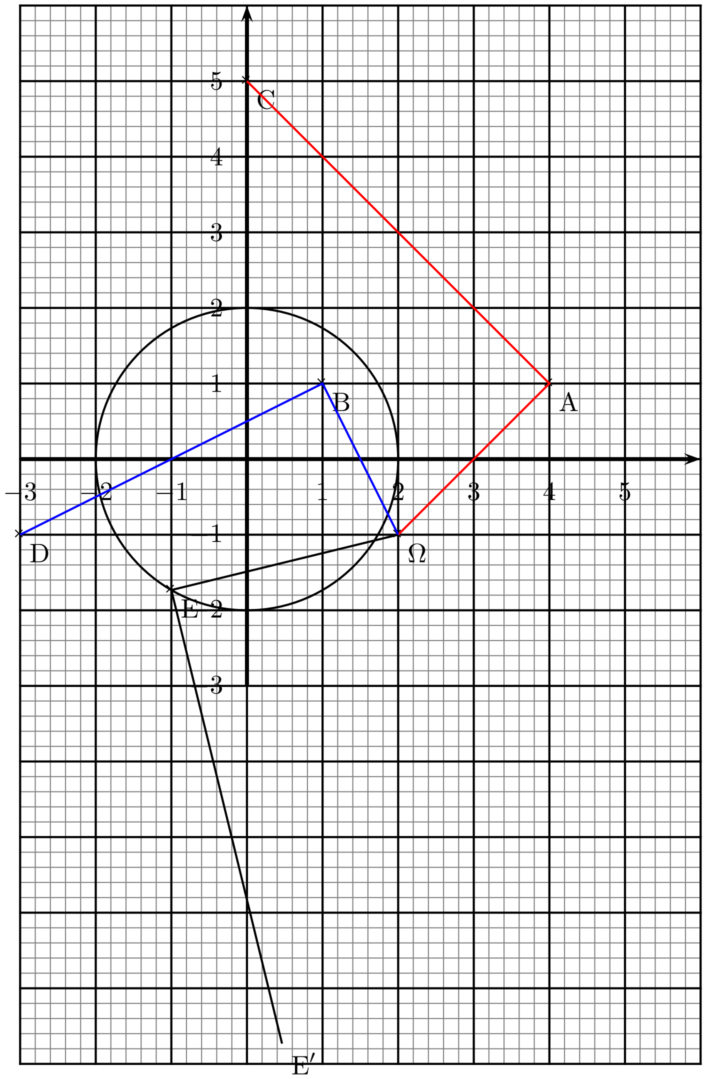
Exercice 2. Le plan complexe est rapporté au repère orthonormal $(O\vec{u},\vec{v})$. On prendra pour unité graphique 1 cm.

1. *Question de cours* On rappelle que : « Pour tout vecteur $\overrightarrow{w}$ non nul, d'affixe z on a : $|z| = \|\overrightarrow{w}\|$ et arg $(z) = \left(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{w}\right)$ ». Soient M, N et P trois points du plan, d'affixes respectives m, n et p tels que $m \neq n$ et $m \neq p$.
   (a) Démontrer que : $\arg\left(\dfrac{p-m}{n-m}\right) = \left(\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{MP}\right)$.
   (b) Interpréter géométriquement le nombre $\left|\dfrac{p-m}{n-m}\right|$
2. On considère les points A, B, C et D d'affixes respectives
$$z_{\text{A}} = 4+\text{i}, \quad z_{\text{B}} = 1+\text{i}, \quad z_{\text{C}} = 5\text{i} \text{ et } z_{\text{D}} = -3-\text{i}.$$
   Placer ces points sur une figure.
3. Soit f l'application du plan dans lui-même qui, à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' tel que :
$$z' = (1+2\text{i})z - 2 - 4\text{i}.$$
   (a) Préciser les images des points A et B par f.
   (b) Montrer que f admet un unique point invariant Ω, dont on précisera l'affixe ω.
4. (a) Montrer que pour tout nombre complexe z, on a :
$$z' - z = -2\text{i}(2-\text{i}-z).$$
   (b) En déduire, pour tout point M différent du point Ω, la valeur de $\dfrac{MM'}{\Omega M}$ et une mesure en radians de l'angle $\left(\overrightarrow{M\Omega}, \overrightarrow{MM'}\right)$
   (c) Quelle est la nature du triangle $\Omega MM'$?
   (d) Soit E le point d'affixe $z_{\text{E}} = -1-\text{i}\sqrt{3}$. écrire z_{E} sous forme exponentielle puis placer le point E sur la figure. Réaliser ensuite la construction du point E′ associé au point E.

Eléments de correction (Exercice 2)

---

1. Cf. cours.
2. Cf Figure
3. (a) On obtient $z_{\text{A}'} = 5\text{i} = z_{\text{C}}$ et $z_{\text{B}'} = -3-3\text{i} = z_{\text{D}}$.
   (b) $M(z)$ est invariant par f si et seulement si $z' = z = (1+2\text{i})z-2-4\text{i} \iff 2\text{i}z = 2+2\text{i} \iff z = 2-\text{i}$. L'équation ayant une seule solution, f a un seul point invariant Ω d'affixe $\omega = 2-\text{i}$.
4. (a) On a $z'-z = 2\text{i}z - 2 - 4\text{i} = -2\text{i}(2-\text{i}-z)$.
   (b) En prenant le module des deux complexes ci-dessus, on obtient $MM' = |-2\text{i}| \times \Omega M$ et si $\Omega \neq M$, $\dfrac{MM'}{\Omega M} = 2$.
   L'égalité trouvée au a peut, si $\Omega \neq M$, s'écrire $\dfrac{z'-z}{2-\text{i}-z} = -2\text{i}$. En prenant les arguments de ces deux complexes, on obtient $\left(\overrightarrow{M\Omega}, \overrightarrow{MM'}\right) = -\dfrac{\pi}{2}$.
   (c) On en déduit que le triangle $\Omega MM'$ est un triangle rectangle en M.
   (d) On a $|z_{\text{E}}|^2 = 1+3 = 4 = 2^2$.
   Donc $z_{\text{E}} = 2\left(-\dfrac{1}{2} - \dfrac{\sqrt{3}}{2}\text{i}\right) = 2\left[\cos\left(-\dfrac{2\pi}{3}\right) + \text{i}\sin\left(-\dfrac{2\pi}{3}\right)\right] = 2\text{e}^{-\text{i}\frac{2\pi}{3}}$.
   Pour placer le point E, il suffit de construire le cercle de centre O et de rayon 2. Le point E est le point de ce cercle d'abscisse 1.
   D'après les questions b et c on a $\text{EE}' = 2\Omega\text{E}$ et $\left(\overrightarrow{E\Omega}, \overrightarrow{EE'}\right) = -\dfrac{\pi}{2}$. On construit donc la perpendiculaire en E à la droite (EΩ) et on place sur cette droite le point E′ tel que $\text{EE}' = 2\Omega\text{E}$ et $\left(\overrightarrow{E\Omega}, \overrightarrow{EE'}\right) = -\dfrac{\pi}{2}$.



5
4
3
2
1
−3
−2
−1
1
2
3
4
5
−1
−2
−3
C
B
A
D
Ω
E
E′