# Tutorat-séance 4

***Objectifs*** :

1. Interpréter du module et de l'argument du quotient.
2. Reconnaître et utiliser la forme complexe des transformations du plans.

**Exercice 1.** Soit $A$ et $B$ deux points du plan d'affixes respectives $\sqrt{3}+i$ et $2i$ .

1. Soit $Z = \dfrac{z_O - z_A}{z_B - z_A}$. Déterminer le module et un argument de $Z$.
2. En déduire la nature du triange $ABO$

**Exercice 2.** Soit $A$, $B$ et $C$ les points d'affixes respectives $1+2i$, $-2+i$ et $-1-2i$.

1. Calculer le nombre complexe $Z = \dfrac{z_{\overrightarrow{BA}}}{z_{\overrightarrow{BC}}}$.
2. En déduire la nature du triangle $ABC$.

**Exercice 3.** Parmi les écritures complexes suivantes, reconnaître les transformations et donner pour chacune d'elles les éléments caractéristiques.

1. $z' = \left(\dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{1}{2}i\right) z - 4 + 2i$
2. $z' = -6z + 2 - 3i$
3. $z' = -iz$
4. $z' + 1 = iz + i$

**Exercice 4.** Soient $A$, $B$, $C$ et $D$ les points d'affixes respectives :

$$z_A = 1 + \mathrm{i}\ ;\ z_B = -1 + i\ ;\ z_C = -1 - i \text{ et } z_D = 1 - i.$$

Soit $r$ la rotation du plan de centre $C$ et d'angle de mesure $-\dfrac{\pi}{3}$.
On appelle $E$ l'image du point $B$ par $r$ et $F$ celle du point $D$ par $r$.

1. Déterminer l'cériture complexe de la rotation $r$.
2. (a) Démontrer que l'affixe du point $E$, note $z_E$, est égale $-1+\sqrt{3}$
   (b) Déterminer l'affixe $z_F$ du point $F$.
   (c) Démontrer que le quotient $\dfrac{z_A - z_E}{z_A - z_F}$ est un nombre réel.
   (d) Que peut-on en déduire pour les points $A$, $E$ et $F$ ?

**Exercice 5.** (Antilles Juin 2010)
Le plan est muni d'un repère orthonormal direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$ d'unité 1 cm.

1. **Restitution organisée de connaissances**
   Pour $M \neq \Omega$, on rappelle que le point $M'$ est l'image du point $M$ par la rotation $r$ de centre $\Omega$ et d'angle de mesure $\theta$ si et seulement si :

$$\left\{\begin{array}{rcll} \Omega M' & = & \Omega M & (1) \\ \left(\overrightarrow{\Omega M}\ ;\ \overrightarrow{\Omega M'}\right) & = & \theta\ 2k\pi \text{ prs } (k \in \mathbb{Z}) & (2) \end{array}\right.$$

   (a) Soient $z$, $z'$ et $\omega$ les affixes respectives des points $M$, $M'$ et $\Omega$.
   Traduire le relations (1) et (2) en termes de modules et d'arguments.
   (b) En déduire l'expression de $z'$ en fonction de $z$, $\theta$ et $\omega$
2. Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes l'équation :

$$z^2 - 4\sqrt{3}z + 16 = 0.$$

   On donnera les solutions sous forme algébrique.

3. Soient $A$ et $B$ les points d'affixes respectives $a = 2\sqrt{3} - 2ß$ et $b = 2\sqrt{3} + 2ß$.
   (a) Ecrire $a$ et $b$ sous forme exponentielle.
   (b) Faire une figure et placer les points $A$ et $B$.
   (c) Montrer que $OAB$ est un triangle équilatral.
4. Soit $C$ le point d'affixe $c = -8ß$ et $D$ son image par la rotation de centre O et d'angle $\dfrac{2\pi}{3}$.
   Placer les points $C$ et $D$.
   Montrer que l'affixe du point $D$ est $d = 4\sqrt{3} + 4ß$.
5. Montrer que $D$ est l'image du point $B$ par une homothétie de centre O dont on déterminera le rapport.
6. Montrer que O$AD$ est un triangle rectangle.

---

# Eléments de corrections

---

**<u>Exercice 4.</u>**

1. D'après le cours l'écriture complexe de la rotation de centre C d'affixe $-1-\mathrm{i}$ et d'angle $-\dfrac{\pi}{3}$ est :

$$z' - z_{\mathrm{C}} = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}\left(z - z_{\mathrm{C}}\right) \iff z' = -1 - \mathrm{i} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}\left(z + 1 + \mathrm{i}\right),$$

   $z$ étant l'affixe d'un point et $z'$ celle de son image par $r$.

2. (a) On a donc $z_{\mathrm{E}} = -1 - \mathrm{i} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}\left(-1 + \mathrm{i} + 1 + \mathrm{i}\right) = -1 - \mathrm{i} + \left(\cos\left(-\dfrac{\pi}{3}\right) + \mathrm{i}\sin\left(-\dfrac{\pi}{3}\right)\right) \times 2\mathrm{i} = -1 - \mathrm{i} + \left(\dfrac{1}{2} - \mathrm{i}\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) \times 2\mathrm{i} = -1 - \mathrm{i} + \mathrm{i} + \sqrt{3} = z_{\mathrm{E}} = -1 + \sqrt{3}$.

   (b) De même $z_{\mathrm{F}} = 1 - \mathrm{i} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}\left(1 + \mathrm{i} + 1 - \mathrm{i}\right) = 1 - \mathrm{i} + \left(\cos\left(-\dfrac{\pi}{3}\right) + \mathrm{i}\sin\left(-\dfrac{\pi}{3}\right)\right) \times 2 = 1 - \mathrm{i} + \left(\dfrac{1}{2} - \mathrm{i}\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) \times 2 = 1 - \mathrm{i} - 1 - \mathrm{i}\sqrt{3} = z_{\mathrm{E}} = -\mathrm{i}\left(1 + \sqrt{3}\right)$.

   (c) $\dfrac{z_{\mathrm{A}} - z_{\mathrm{E}}}{z_{\mathrm{A}} - z_{\mathrm{F}}} = \dfrac{1 + \mathrm{i} + 1 - \sqrt{3}}{1 + \mathrm{i} + \mathrm{i}\left(1 + \sqrt{3}\right)} = \dfrac{\left[2 + \sqrt{3} + \mathrm{i}\right]\left[1 - \mathrm{i}\left(2 + \sqrt{3}\right)\right]}{\left[1 + \mathrm{i}\left(2 + \sqrt{3}\right)\right]\left[1 - \mathrm{i}\left(2 + \sqrt{3}\right)\right]} = \dfrac{2 - \sqrt{3} + 2 + \sqrt{3}}{1 + \left(2 + \sqrt{3}\right)^2} = \dfrac{4}{1 + 4 + 3 + 4\sqrt{3}} = \dfrac{4}{8 + 4\sqrt{3}} = \dfrac{1}{2 + \sqrt{3}} \in \mathbb{R}_+$.

   (d) $\dfrac{z_{\mathrm{A}} - z_{\mathrm{E}}}{z_{\mathrm{A}} - z_{\mathrm{F}}}$ réel positif entraîne que $\arg\left(\dfrac{z_{\mathrm{A}} - z_{\mathrm{E}}}{z_{\mathrm{A}} - z_{\mathrm{F}}}\right) = \left(\overrightarrow{\mathrm{FA}}, \overrightarrow{\mathrm{EA}}\right) = 0 \quad [2\pi]$ ce qui signifie que les points A, E et F sont alignés.