# Exercices : Logarithme népérien

**Exercice 1.**

1. Déterminer l'ensemble de définition de chacune des fonctions :

   (a) $f : x \longmapsto \ln(1-3x)$

   (b) $f : x \longmapsto \ln(x+1) + \ln(x-1)$

   (c) $f : x \longmapsto \ln(x^2+1)$

   (d) $f : x \longmapsto \ln(1-e^x)$

2. Exprimer, en fonction de $\ln 2$ seulement, les nombres :

   (a) $\ln 32$ (b) $\ln 4096$ (c) $\ln\left(\dfrac{1}{8}\right)$ (d) $\ln 0,0625$

3. Exprimer, en fonction de $a = \ln 2$ et $b = \ln 5$, les nombres :

   (a) $\ln \dfrac{8}{25}$

   (b) $\ln 625$

   (c) $\ln(10^6)$

   (d) $\ln 0,08$

   (e) $\ln \dfrac{1}{2} + \ln \dfrac{2}{3} + \cdots + \ln \dfrac{98}{99} + \ln \dfrac{99}{100}$

4. Simplifier les expressions suivantes :

   (a) $\ln e^5$

   (b) $\ln \sqrt{e} + \ln \dfrac{1}{e}$

   (c) $e^{\ln(3+\sqrt{2})}$

   (d) $\ln(e^3\sqrt{e})$

5. Démontrer que les fonctions suivantes sont impaires :

   (a) $f$ est définie sur $]-3;3[$ par
   $$f(x) = \ln \frac{3-x}{3+x}$$

   (b) $g$ est définie sur $\mathbb{R}$ par
   $$g(x) = \ln(x + \sqrt{x^2+1}$$

**Exercice 2.** *Datation au carbone* 14

Les archéologues et les paléontologues datent les objets découverts contenant du carbone (restes d'êtres vivants : os, fossiles, ...) en mesurant la proportion de l'un de ses isotopes, le carbone 14, encore présent dans l'objet.
En effet, à la mort d'un être vivant, le carbone 14 présent dans son organisme se désintègre au fil des années, de sorte que, si $p$ est la proportion de $C_{14}$ restante au bout de $N$ années, alors $N = -8310 \ln p$

1. Le squelette d'un « Homme de Cro-Magnon »contient 5% du carbone 14 initial. Quel âge-a-t-il ?
2. Lucy est la forme la plus ancienne d'Hominidé connu ; les spécialiste lui donnent $4,4$ millions d'années.
   A-t-on pu raisonnablement dater les fragments trouvés à l'aide du carbone 14 ?
3. Découverte dans un glacier en 1991, la momie Hibernatus contenait $52,8\%$ (à 1% près) du carbone 14 initial.
   Donner un encadrement de l'âge d'Hibernatus.

**Exercice 3.** *Radioactivité*

La loi d'évolution d'un corps radioactif est donnée par la formule $N_1 = N_0e^{-at}$, $a$ étant une constante positive et $N_t$ le nombre d'atomes contenus dans un échantillon de ce corps au temps $t$.

1. Représenter graphiquement la fonction $t \longmapsto N_t$
2. On désigne par $T$ le temps au bout duquel $N_T = \dfrac{1}{2}N_0$.
   Exprimer $a$ en fonction de $T$. Comparer $N_{t+T}$ à $N_t$. $T$ est appelé « demi-vie »ou « période »du corps radioactif.

3. Au bout de combien de temps 1 g de radium perdra-t-il une masse de 1 mg (la période du radium étant de 1622 ans) ?
(La masse est proportionnelle au nombre d'atomes.)

**Exercice 4.** Résoudre l'équation, l'inéquation ou le système proposé, après avoir déterminé l'ensemble de définition des expressions en présence.

1. $\ln(x+1)+\ln(x+3)=\ln(x+7)$
2. $\ln(x^2+4x+3)=\ln(x+7)$
3. $\ln x = 3$
4. $\ln(3x-1)=5$
5. $\ln x+\ln(x-7)=\ln 2$
6. $$\begin{cases} e^x-2e^y=-5 \\ 3e^x+e^y=13 \end{cases}$$
(Poser $X=e^x$ et $Y=e^y$).

**Exercice 5.** Déterminer le plus petit entier $n$ vérifiant :

1. $1,0001^n > 10^{100}$
2. $0,999^n < 10^{-100}$

**Exercice 6.** Calculer les limites, si elles existent, des fonctions suivantes en 0 et en $+\infty$.

1. $x \longmapsto \sqrt{1+\ln^2 x}$
2. $x \longmapsto \dfrac{\ln x}{x^2}$
3. $x \longmapsto x-\ln x$
4. $x \longmapsto \dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}$
5. $x \longmapsto \sqrt{x}\ln x$
6. $x \longmapsto x\ln\sqrt{x}$

**Exercice 7.** Préciser sur quel intervalle (ou réunion d'intervalles) la fonction est dérivable, et calculer sa dérivée.

1. $f(x)=\ln(3x+2)$
2. $f(x)=\ln(x^2-1)$
3. $f(x)=\dfrac{1}{2}\ln^2 x$
4. $f(x)=\ln(\ln x)$
5. $f(x)=x\ln x-x$
6. $f(x)=\ln\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)$

**Exercice 8.** On considère la fonction $f : x \longmapsto \dfrac{1}{2}x+2+\ln\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)$

1. Déterminer l'ensemble de définition de $f$ et étudier les limites aux bornes de cet ensemble (quatre calculs).
2. Calculer $f'(x)$ et dresser le tableau de variations de $f$.
3. Montrer que la courbe $\mathscr{C}_f$ admet en $+\infty$ et $-\infty$ une asymptote oblique $\Delta$ et préciser la position de $\mathscr{C}_f$ par rapport à $\Delta$.
4. Construire $\mathscr{C}_f$ et $\Delta$ (unité : 1 cm).
5. Montrer que le point $\Omega(0;2)$ est centre de symétrie de $\mathscr{C}_f$.

**Exercice 9.** On pose, pour $x>0$ et $\alpha$ réel,

$$f_\alpha(x)=x^\alpha=e^{\alpha\ln x}$$

1. Que dire de $f_\alpha(x)$ lorsque $\alpha=0$ ? lorsque $\alpha=1$ ?
*Dans la suite, on suppose que $\alpha \notin \{0;1\}$*
2. Etudier les limites de $f_\alpha$ en 0 et en $+\infty$, en distinguant les deux cas :

(a) $\alpha > 0$ (b) $\alpha < 0$

3. On suppose que $\alpha < 0$.
Dresser le tableau de variations de $f_\alpha$ et tracer sa représentation graphique $\mathscr{C}_\alpha$ dans les cas :

$$\alpha = -2 \qquad \alpha = -1 \qquad \alpha = -0,5 \qquad \alpha = -0,1$$

4. On suppose que $\alpha > 0$
   (a) On prolonge $f_\alpha$ en 0 en posant $f_\alpha(0) = 0$.
   Montrer qu'ainsi $f_\alpha$ est continue en 0.
   (b) Etudier la dérivabilité en 0 de la fonction ainsi prolongée (distinguer les cas $\alpha > 1$ et $0 < \alpha < 1$).
   (c) Etudier
   $$\lim_{x \to +\infty} \frac{f_\alpha(x)}{x}$$
   en distinguant deux cas. Interpréter les résultats.
   (d) Tracer les courbes $\mathscr{C}_{0,2}$, $\mathscr{C}_{0,5}$, $\mathscr{C}_2$ et $\mathscr{C}_{4,5}$ sur le même graphique.

**Exercice 10.** La fonction suivante permet de modéliser des phénomènes aléatoires se produisant en moyenne trois fois par unité de temps.

$$(\text{loi « gamma trois »}) : f(x) = \frac{1}{2}x^2e^{-x} \qquad x \geq 0$$

Etudier la fonction $f$ sur $[0; +\infty[$ :

1. Limite en $+\infty$.
2. Dérivée et sens de variation.
3. Représentation graphique.

**Exercice 11.** On considère la fonction $f$ définie sur $[0; +\infty[$ par

$$f(x) = \frac{\ln x + xe}{x^2}$$

On note $\Gamma$ sa représentation graphique dans un repère orthonormal $(O\vec{u}, \vec{v})$, unité graphique : 2 cm.

1. **Etude d'une fonction auxiliaire.**
   On considère la fonction $g$ définie sur $]0; +\infty[$ par :
   $$g(x) = -2\ln x - xe + 1$$
   (a) Déterminer les limites de $g$ en 0 et en $+\infty$.
   (b) Etudier le sens de variation de $g$.
   (c) Montrer que, dans $[0,5; 1]$, l'équation $g(x) = 0$ admet une solution et une seule, notée $\alpha$.
   Déterminer un encadrement de $\alpha$ à $0,1$ près.
   (d) En déduire le signe de $g(x)$ selon les valeurs de $x$.
2. **Etude de la fonction $f$**
   (a) Déterminer les limites de $f$ aux bornes de son ensemble de définition.
   (b) Soit $f'$ la fonction dérivée de $f$. Vérifier que
   $$f'(x) = \frac{g(x)}{x^3}$$
   puis étudier le sens de variation de $f$ sur $]0; +\infty[$.

(c) Montrer que
$$f(\alpha) = \frac{1+\alpha e}{2\alpha^2}$$

(d) Donner le tableau de variations de $f$.

(e) Construire $\Gamma$

**Exercice 12.** *Un truc de banquier*

Les banquiers calculent mentalement le temps approximatif de doublement d'un capital, placé à intérêts composés, de la façon suivante ; « Si $t$ est le taux d'intérêt (en %), le capital double au bout de $\frac{70}{t}$ années. »

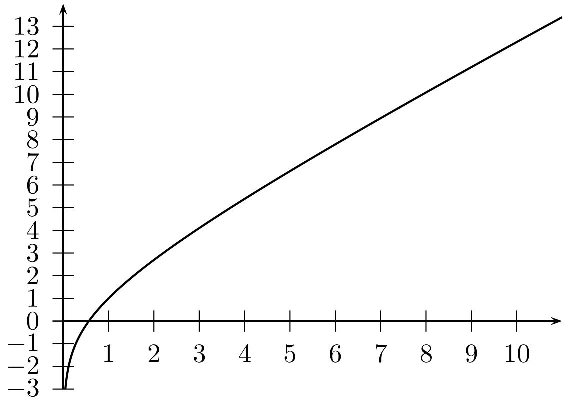
On rappelle qu'au bout de $n$ années de placement au taux $t$, la valeur d'un capital est multipliée par :
$$\left(1+\frac{t}{100}\right)^n$$

1. Etablir, pour $x \geq 0$, l'encadrement :
$$x - \frac{x^2}{2} \leq \ln(1+x) \leq x$$
2. En déduire un majorant de l'erreur dans l'approximation
$$\ln(1+x) \simeq x$$
3. Justifier le « truc »du banquier, pour les petites valeurs de $t$ ($t \leq 14$).
4. Enoncer des règles analogues pour déterminer mentalement le temps au bout duquel un capital triple, quintuple, décuple.

**Exercice 13.** On considère la fonction $f$ définie sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$ par
$$f(x) = x + \ln x.$$

On nomme $\Gamma$ sa courbe représentative dans un repère orthogonal $(O\vec{i}, \vec{j})$ du plan.

1. (a) Déterminer les limites de la fonction $f$ aux bornes de son ensemble de définition.
   (b) Montrer que la fonction $f$ est strictement croissante sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$.
2. (a) Montrer que, pour tout entier naturel $n$, l'équation $f(x) = n$ admet une unique solution dans $]0\ ;\ +\infty[$. On note $\alpha_n$ cette solution. On a donc : pour tout entier naturel $n$, $\alpha_n + \ln \alpha_n = n$.
   (b) Sur la page annexe, on a tracé $\Gamma$ dans le repère $(O\vec{i}, \vec{j})$.
   Placer les nombres $\alpha_0$, $\alpha_1$, $\alpha_2$, $\alpha_3$, $\alpha_4$ et $\alpha_5$ sur l'axe des abscisses en laissant apparents les traits de construction.
   (c) Préciser la valeur de $\alpha_1$.
   (d) Démontrer que la suite $(\alpha_n)$ est strictement croissante.
3. (a) Déterminer une équation de la tangente $\Delta$ à la courbe $\Gamma$ au point A d'abscisse 1.
   (b) Etudier les variations de la fonction $h$ définie sur $]0\ ;\ +\infty[$ par
   $$h(x) = \ln x - x + 1.$$
   En déduire la position de la courbe $\Gamma$ par rapport à $\Delta$.
   (c) Tracer $\Delta$ sur le graphique de la page annexe.
   Démontrer que, pour tout entier naturel $n$ non nul, $\frac{n+1}{2} \leqslant \alpha_n$.
4. Déterminer la limite de la suite $(\alpha_n)$.




**Exercice 14.** Étudiez la fonction $f\ :\ x \longmapsto 2^x$.

**Exercice 15.**

**I. Première partie**

On appelle $f$ et $g$ les deux fonctions définies sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$ par

$$f(x) = \ln(1+x) - x \quad \text{et} \quad g(x) = \ln(1+x) - x + \frac{x^2}{2}.$$

1. Etudier les variations de $f$et de $g$ sur $[0\ ;\ +\infty[$.
2. En déduire que pour tout $x \geqslant 0$, $x - \dfrac{x^2}{2} \leqslant \ln(1+x) \leqslant x$.

**II. Deuxième partie**

On se propose d'étudier la suite $(u_n)$ de nombres réels définie par :

$$u_1 = \frac{3}{2} \quad \text{et} \quad u_{n+1} = u_n\left(1 + \frac{1}{2^{n+1}}\right).$$

1. Montrer par récurrence que $u_n > 0$ pour tout entier naturel $n \geqslant 1$.
2. Montrer par récurrence que pour tout entier naturel $n \geqslant 1$ :
$$\ln u_n = \ln\left(1+\frac{1}{2}\right) + \ln\left(1+\frac{1}{2^2}\right) + \cdots + \ln\left(1+\frac{1}{2^n}\right).$$
3. On pose $S_n = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2^2} + \dfrac{1}{2^3} + \cdots + \dfrac{1}{2^n}$ et $T_n = \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{4^2} + \dfrac{1}{4^3} + \cdots + \dfrac{1}{4^n}$.
A l'aide de la première partie, montrer que :
$$S_n - \frac{1}{2}T_n \leqslant \ln u_n \leqslant S_n.$$
4. Caiculer $S_n$ et $T_n$ en fonction de $n$. En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} T_n$.
5. Etude de la convergence de la suite $(u_n)$.
   (a) Montrer que la suite $(u_n)$ est strictement croissante.
   (b) En déduire que $(u_n)$ est convergente. Soit $\ell$ sa limite.
   (c) On admet le résultat suivant : si deux suites $(v_n)$ et $(w_n)$ sont convergentes et telles que $v_n \leqslant w_n$ pour tout $n$ entier naturel, alors
   $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n \leqslant \lim\limits_{n\to+\infty} w_n$. Montrer alors que $\dfrac{5}{6} \leqslant \ln \ell \leqslant 1$ et en déduire, un encadrement de $\ell$.

**Exercice 16.** On pose $f(x) = \dfrac{e^x}{x^\alpha}$.

1. (a) Montrez que $f(x) = e^{x\left(1-\alpha\frac{\ln x}{x}\right)}$
   (b) Déduisez-en $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$
2. On pose $\psi(x) = x^\alpha e^{-x}$
   (a) Démontrez que $\psi(x) = e^{-x\left(1-\alpha\frac{\ln x}{x}\right)}$
   (b) Qu'en déduisez-vous ?

**Exercice 17.** (Antilles-Guyanne Sept.2010)

**PARTIE A - Restitution organisée des connaissances**

On suppose connues la dérivée de la fonction exponentielle et la formule de dérivation de $u \circ v$ ainsi que ses conditions d'utilisation.

On suppose savoir que la fonction ln est dérivable sur $]0\ ;\ +\infty[$ et que pour tout $x$ de $]0\ ;\ +\infty[$ on a : $\exp(\ln x) = x$.

A partir de ces quatre arguments, montrer que la dérivée de la fonction ln est la fonction définie sur $]0\ ;\ +\infty[$ qui à $x$ associe $\dfrac{1}{x}$.

**PARTIE B - Etude de fonction**

On considère la fonction $f$ définie sur $]0\ ;\ +\infty[$ par

$$f(x) = x + \frac{\ln x}{x}.$$

Le but du problème est l'étude de cette fonction (et le calcul d'une aire).

On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de la fonction $f$ dans le plan muni d'un repère orthonormal $\left(\mathrm{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$ d'unit graphique 3 cm.

**I - Etude d'une fonction auxiliaire**

On considère la fonction $g$ définie sur $]0\ ;\ +\infty[$ par

$$g(x) = x^2 + 1 - \ln x.$$

1. Etudier les variations de $g$ sur $]0\ ;\ +\infty[$.
2. En deduire le signe de $g$ sur $]0\ ;\ +\infty[$.

**II - Etude de la fonction $f$ et tracé de sa courbe représentative $\mathscr{C}$**

1. Déterminer la limite en 0 de la fonction $f$. Quelle est l'interprétation graphique de ce résultat ?
2. Déterminer la limite en $+\infty$ de $f$ puis montrer que la droite $\mathscr{D}$ d'équation $y = x$ est asymptote la courbe $\mathscr{C}$.
3. Soit $f'$ la fonction dériveé de la fonction $f$. Calculer $f'(x)$ pour tout réel $x$ de $]0\ ;\ +\infty[$.
4. En déduire le sens de variation de $f$ sur $]0\ ;\ +\infty[$ puis dresser le tableau de variations de la fonction $f$.
5. Déterminer le point A de la courbe $\mathscr{C}$ en lequel la tangente $\mathscr{T}$ est parallèle à la droite $\mathscr{D}$.
6. Dans le repère $\left(\mathrm{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$ tracer les droites $\mathscr{D}$ et $\mathscr{T}$ et la courbe $\mathscr{C}$.

**Exercice 18.** (La réunion Sept.2010)

Pour tout nombre réel $k$ strictement positif, on considère la fonction $f_k$ définie sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$ par

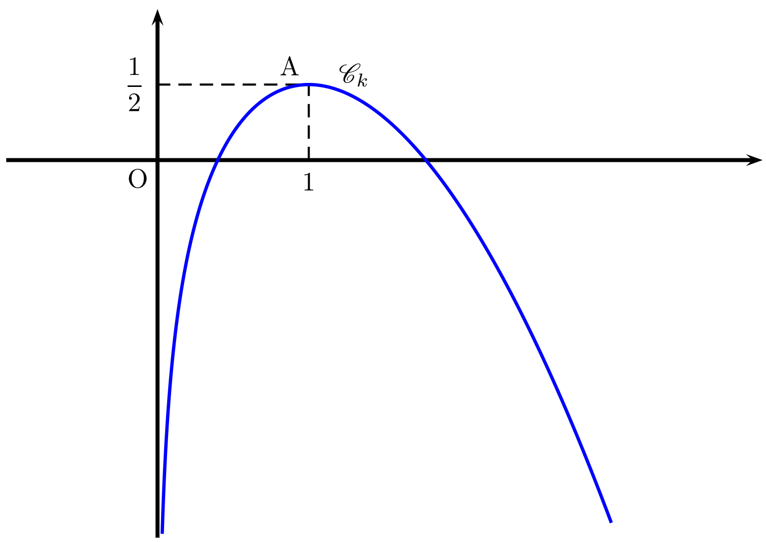
$$f_k(x) = \ln(x) - kx^2 + 1.$$

1. Déterminer la limite de la fonction $f_k$ en 0.
2. On rappelle que $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(x)}{x} = 0$. Démontrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(x)}{x^2} = 0$. En déduire la limite de la fonction $f_k$ en $+\infty$.
3. Montrer que, pour tout nombre réel $x$ strictement positif, $f_k'(x) = \dfrac{1-2kx^2}{x}$.
4. Pour un nombre réel $k$ strictement positif : on donne ci-dessous le tableau de variations de la fonction $f_k$.

| $x$ | $0$ | | $\frac{1}{\sqrt{2k}}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f_k(x)$ | ‖ | $\nearrow$ | $\frac{1-\ln(2k)}{2}$ | $\searrow$ | |

Justifier les renseignements sur les variations de la fonction $f_k$ figurant dans ce tableau.

5. On a tracé ci-dessous la courbe $\mathscr{C}_k$ reprsentative d'une fonction $f_k$ pour une certaine valeur du nombre réel $k$ strictement positif. Le point $\mathrm{A}\left(1\ ;\ \frac{1}{2}\right)$ appartient à la courbe $\mathscr{C}_k$.
   Quelle est la valeur du nombre réel $k$ correspondant ? Justifier la démarche.




**<u>Exercice</u> 19.** (Métropole Sept.2010)

Soit $f$ la fonction définie sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$ par

$$f(x) = x(1 - \ln x).$$

La courbe représentative $\mathscr{C}$ de la fonction $f$ est donneé en annexe 1 (à rendre avec la copie).

1. Etudier le signe de $f(x)$ suivant les valeurs du nombre réel $x$.
2. Déterminer les limites de la fonction $f$ aux bornes de son ensemble de définition.
3. Déterminer la dérivée de la fonction $f$ sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$ et dresser le tableau de variations de la fonction $f$ sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$.
4. Soit $a$ un nombre réel strictement positif. On considère la tangente $(T_a)$ au point A de la courbe $\mathscr{C}$ d'abscisse $a$.
   (a) Déterminer, en fonction du nombre réel $a$, les coordonnées du point $\mathrm{A}'$, point d'intersection de la droite $(T_a)$ et de l'axe des ordonnées.
   (b) Expliciter une démarche simple pour la construction de la tangente $(T_a)$. Sur l'annexe 1 à( rendre avec la copie) construire la tangente $(T_a)$ au point A placé sur la figure.

**<u>Exercice</u> 20.** (Polynésie 2009)

Pour tout entier naturel $n$, on considère la fonction $f_n$ définie sur $]0\ ;\ +\infty[$ par :

$$f_n(x) = -nx - x\ln x.$$

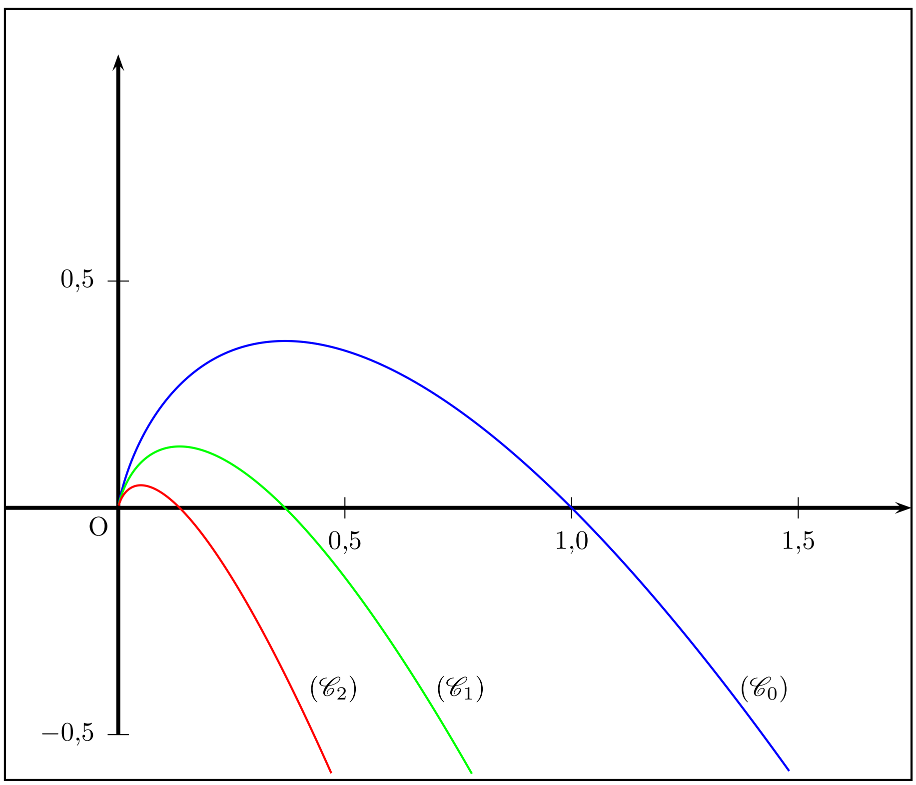
On note $(\mathscr{C}_n)$ la courbe représentative de la fonction $f_n$, dans un repère orthonormal $\left(\text{O}, \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath}\right)$.
Les courbes $(\mathscr{C}_0)$, $(\mathscr{C}_1)$ et $(\mathscr{C}_2)$ représentatives des fonctions $f_0$, $f_1$ et $f_2$ sont données en annexe.
On rappelle que $\lim\limits_{x \to 0} x \ln x = 0$.

**Partie A : Etude de la fonction $f_0$ définie sur $]0\ ;\ +\infty[$ par $f_0(x) = -x \ln x$.**

1. Déterminer la limite de $f_0$ en $+\infty$.
2. Etudier les variations de la fonction $f_0$ sur $]0\ ;\ +\infty[$.

**Partie B : Etude de certaines propriétés de la fonction $f_n$, $n$ entier naturel.**
Soit $n$ un entier naturel.

1. Démontrer que pour $x \in ]0\ ;\ +\infty[$ , $f_n'(x) = -n - 1 - \ln x$ où $f_n'$ désigne la fonction dérivée de $f_n$.
2. (a) Démontrer que la courbe $(\mathcal{C}_n)$ admet en un unique point $A_n$ d'abscisse $\mathrm{e}^{-n-1}$ une tangente parallèle à l'axe des abscisses.
   (b) Prouver que le point $A_n$ appartient à la droite $\Delta$ d'équation $y = x$.
   (c) Placer sur la figure en annexe les points $A_0$, $A_1$, $A_2$.
3. (a) Démontrer que la courbe $(\mathscr{C}_n)$ coupe l'axe des abscisses en un unique point, noté $B_n$, dont l'abscisse est $\mathrm{e}^{-n}$.
   (b) Démontrer que la tangente $(\mathscr{C}_n)$ au point $B_n$ a un coefficient directeur indépendant de l'entier $n$.
   (c) Placer sur la figure en annexe les points $B_0$, $B_1$, $B_2$.



**Définition 1 :**

La fonction log : $x \mapsto \dfrac{\ln x}{\ln 10}$ définie pour $x > 0$ est appele **fonction logarithme décimal**

**Exercice 21.**

1. Étudiez brièvement cette fonction et mettre en évidence ses principales propriétés algébriques.
2. On considère un repère où l'axe des abscisses est gradué comme d'habitude et où l'axe des ordonnées est gradué en échelle logarithmique, I.e qu'une uniét étant choisie, la $k-ime$ unité correspond à une ordonne de $10^k$.
   Représenter dans un tel repère les fonctions suivantes :
   (a) $f_1 : x \mapsto 10^x$
   (b) $f_2 : x \mapsto 32 \times 10^x$
   (c) $f_3 : x \mapsto 0,32 \times 10^x$
   (d) $f_4 : x \mapsto e^x$
   (e) $f_5 : x \mapsto e^{-32x}$

**Exercice 22.** *Musique, complexe, logarithme*

On définit le logarithme de base 2 d'un réel strictement positif par $\log_2(x) = \dfrac{\ln(x)}{\ln(2)}$. Dans la suite du problème, $E(x)$ désigne la partie entière de $x$.

1. **Préliminaires**
   (a) Étudier les variations de la fonction $\log_2$.
   (b) Calculer $\log_2(32)$. Que dire de $\log_2(x)$ si le réel $x$ est compris entre $2^n$ et $2^{n+1}$ ?
   (c) On suppose que $E(x) = n$. Calculez $E(x+1)$ en fonction de $n$.
2. **La la la la**
   La fréquence rapportée de la fréquence $f$ à l'intervalle $[1,2[$ est le nombre $r(f)$ défini de la façon suivante : soit $p$ un entier tel que $2^p \leq f$ et $f < 2^{p+1}$, le nombre $f$ appartenant $[1,+\infty[$ ; alors $r(f) = 2^{-p}f$.
   (a) Montrer que $r(f) = 2^{-E(\log_2(f))}f$
   (b) On dit qu'une fonction $f$ est multiplicativement périodique de période $T$ $(T > 0)$ si, pour tout réel $t$, on a $\phi(Tt) = \phi(t)$.
   Montrer que la fonction $r$ est multiplicativement périodique de période 2.
   On suppose que $r(f_1) = r(f_2)$ : peut-on en déduire qu'il existe un entier relatif $p$ tel que $f_1 = 2^p f_2$ ?
   Quelle est la fréquence rapportée de $f = 203$ ?
   (c) A la fréquence $f$ on associe le point $M$ du plan complexe d'affixe $z(f) = fe^{2i\pi \log_2(f)}$.
   On dit que deux sons de frquences $f_1$ et $f_2$ déterminent la même note si et seulement si $z(f_1)$ et $z(f_2)$ ont le même argument.
   Montrer alors que $r(f_1) = r(f_2)$. la réciproque est-elle vraie ?
   (d) On considère un LA la frquence $f_0 = 440$. On note $\zeta = 2^{1/12}$. On définit la suite des demi-tons montant du LA 440 de la façon suivante
   $$f_0 = 440 \qquad f_{n+1} = \zeta f_n$$
   Que pouvez-vous dire de cette suite ?
   Établir que $f_{n+12} = 2f_n$ et interprter physiquement cette relation.
   La suite des notes, à partir du LA 440, obtenu par demi-tons montant est LA#, SI, DO, DO#, RÉ, RÉ#, MI, FA, FA#, SOL, SOL#, LA, ...
   quelle note correspond un son de fréquence $f = 18\,794$ ?