Exercices : Fonction Exponentielle

Exercice 1. Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{exp(2x)}{exp(x)}$$

Démontrer que $f' = f$ et en déduire que, pour tout réel x,

$$exp(2x) = (exp(x))^2$$

Exercice 2. Simplifier les expressions suivantes :

1. $A = e^{2x} \times e^{-x}$
2. $B = e^{3x+2} \times e^{1-2x}$
3. $C = \dfrac{e^{2x+1}}{e^{-2x}}$
4. $D = \dfrac{e^{3x-1}}{e^{2-x}}$

Exercice 3.

1. Démontrer que, pour tout réel x, :
$$e^{\frac{x}{2}} = \sqrt{e^x}$$
2. Simplifier les expressions suivantes :
   (a) $A = \sqrt{3e^{-x} + 6e^{-x}}$
   (b) $B = \sqrt{\dfrac{2e^{3x+1}}{e^{2x-1}}}$

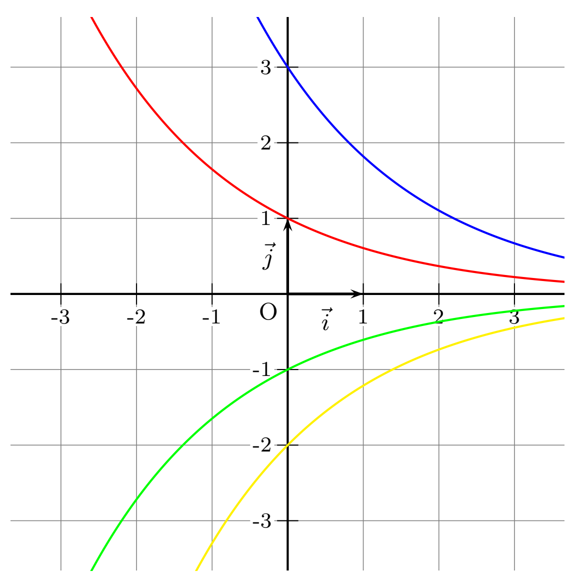
Exercice 4. Dans chacun des cas suivants, démontrer que la fonction f qui vérifie $f' = kf$, où k est un réel à préciser :

1. $f : x \longmapsto e^{-2x+1}$
2. $f : x \longmapsto e^{1-2x}$
3. $f : x \longmapsto -e^{\frac{x-1}{4}}$
4. $f : x \longmapsto \dfrac{2}{3}e^{-2x+1}$

Exercice 5. Les courbes ci-dessous représentent des fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ vérifiant une égalité de la forme :

$$f' = -\frac{1}{2}f$$

Déterminer une équation de ces courbes



Exercice 6. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{e^x - 1}{e^x + 1}$$

1. Démontrer que f est une fonction impaire.
2. Démontrer que $f(2x) = \dfrac{2f(x)}{1 + (f(x))^2}$
3. Exprimer $f(x+y)$ en fonction de $f(x)$ et de $f(y)$.

Exercice 7. Dans chacun des cas suivants, exprimer $f(x)$ en fonction de x :

1. $f' + 2f = 0$ et $f(0) = 1$
2. $2f' + f = 0$ et $f(0) = -2$
3. $f' + f = 0$ et $f(1) = 2$
4. $2f' + \dfrac{3}{2}f = 0$ et $f(-1) = -2$

Exercice 8. Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = e^{2x} - x$$

1. Démontrer que :
$$f'' = 2f' + 2 \qquad f(0) = 1 \qquad \text{et} \qquad f'(0) = 1$$
2. Soit g une fonction deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que :
$$g'' = 2g' + 2 \qquad g(0) = 1 \qquad \text{et} \qquad g'(0) = 1$$
   (a) On pose $h = g' + 1$. Vérifier que $h' = 2h$; en déduire que, pour tout réel x :
$$g'(x) = 2e^{2x} - 1$$
   (b) Justifier que la fonction g est égale à f.
3. Déterminer toutes les fonctions φ deux fois dérivables sur $\mathbb{R}$ telles que :
$$\varphi'' = 2\varphi' + 2$$

Exercice 9.

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation
$$3X^2 + 4X - 7 = 0$$
2. En déduire les solutions dans $\mathbb{R}$ de l'équation :
$$3e^{2x} + 4e^x - 7 = 0$$

Exercice 10. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :

1. $e^{2-x} < 1$
2. $e^{-x} \geq -2$
3. $e^{3x} \leq 1$
4. $e^{2x-1} > e\sqrt{e}$
5. $4e^{2x} < 3e^x + 1$
6. $\dfrac{2e^x - 3}{e^x - 3} < \dfrac{1}{2}$
7. $e^x < e^{-x} + 1$
8. $\dfrac{e^{2x} + 1}{2e^x - 1} \leq 2$

Exercice 11. Déterminer les limites en $+\infty$ et en $-\infty$ de la fonction f :

1. $f : x \longmapsto e^{-x}$
2. $f : x \longmapsto e^{2x} - 2e^x$
3. $f : x \longmapsto \dfrac{e^{-x}+1}{e^x+1}$
4. $f : x \longmapsto \sqrt{e^{2x}+1}$

Exercice 12. En utilisant le résultat suivant :

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

Déterminer les limites suivantes :

$$\lim_{x\to+\infty} x\left(e^{\frac{1}{x}} - 1\right) \qquad \text{et} \qquad \lim_{x\to-\infty} x\left(e^{\frac{1}{x^2}} - 1\right)$$

Exercice 13. Déterminer le tableau de variation de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = x^2e^x$$

Exercice 14. Calculez les dérivées et les limites aux bornes des ensembles de définitions des fonctions définies par les expressions suivantes :

$f_1(x) = e^x + x^2 + 1$

$f_2(x) = 5e^x + 5xe^x$

$f_3(x) = e^x \sin(x)$

$f_4(x) = \dfrac{e^x+1}{e^x-1}$

$f_5(x) = \dfrac{3x+1-e^x}{e^x}$

$f_6(x) = x^3e^{-x}$

$f_7(x) = \dfrac{x^2e^x}{x+1}$

$f_8(x) = \dfrac{e^x}{x}$

$f_9(x) = \dfrac{1}{e^x}$

$f_{10}(x) = (e^x)^2 + \dfrac{1}{e^x}$

$f_{11}(x) = e^{-x}$

$f_{12}(x) = e^{4x+1}$

$f_{13}(x) = e^{\cos(x)}$

$f_{14}(x) = e^{5x^3+7x+4}$

$f_{15}(x) = (x+1)e^{-x+1}$

$f_{16}(x) = \dfrac{e^{2x}-1}{x}$

Exercice 15. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = e^x - x$$

1. Etudier les variations de f.
2. En déduire que, pour tout réel x, $e^x \geq x$
3. Utiliser ce résultat pour étudier la limite de e^x lorsque x tend vers $+\infty$.

Exercice 16. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = e^x - x - 4$$

et $\mathscr{C}_f$ sa représentation graphique dans le plan muni d'un repère orthonormal $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1. Etudier les variations de la fonction f.
2. En remarquant que, pour tout réel non nul x :

$$f(x) = x\left(\frac{e^x}{x} - 1 - \frac{4}{x}\right)$$

   déterminer la limite de f en $+\infty$.
3. Démontrer que la droite $\mathscr{D}$ d'équation $x + y + 4 = 0$ est asymptote à la courbe $\mathscr{C}_f$ en $-\infty$ et préciser la position de $\mathscr{C}_f$ par rapport à $\mathscr{D}$

4. Tracer la droite $\mathscr{D}$ et la courbe $\mathscr{C}_f$

Exercice 17. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R} - \{-2\}$ par :

$$f(x) = e^{\frac{x-1}{x+2}}$$

et $\mathscr{C}_f$ sa représentation graphique dans le plan muni d'un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1. Déterminer le tableau des variations de la fonction f.
2. Tracer la courbe $\mathscr{C}_f$ en précisant ses asymptotes.

Exercice 18. Soit (E) l'équation différentielle :

$$y' + 2y = 4x + 3$$

1. Soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$.
Démontrer que si la fonction f est solution de (E) alors la fonction f' est solution de l'équation différentielle :
$$(E') : y' + 2y = 4$$
2. Résoudre l'équation différentielle (E) et en déduire que les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle (E) sont les fonctions de la forme :
$$x \longmapsto 2x + \frac{1}{2} + Ke^{-2x} \qquad \text{où K est une constante réelle.}$$
3. Déterminer la solution de (E) vérifiant la condition initiale $y(0) = 1$

Exercice 19. L'expérience montre que, si l'on considère une population macroscopique de noyaux radioactifs (c'est-à-dire dont le nombre est de l'ordre du nombre d'Avogadro, soit 10^{23}), le nombre moyen de noyaux qui se désintègrent pendant un petit intervalle Δt à partir de l'instant t, rapporté au nombre total de noyaux $N(t)$ présents à l'instant t et au temps d'observation Δt, est une constante λ caractérisque du nombre de noyau. On peut donc écrire :

$$\frac{\Delta N(t)}{N((t)} \simeq -\Delta\lambda t \qquad \text{ou} \qquad \frac{\Delta N(t)}{\Delta t} \simeq -\lambda N(t)$$

En prenant la limite de chaque membre lorsque Δt tend vers 0, on obtient $\dfrac{dN}{dt} = -\lambda N$, ou encore

$$N' = -\lambda N$$

1. En déduire l'expression de $N(t)$ en fonction de t, de λ et du nombre N_0 d'atomes radioactifs présents à l'instant $t = 0$.
2. Démontrer qu'il existe un unique réel T, tel que, pour tout réel positif t, on ait :
$$N(t+T) = \frac{1}{2}N(t)$$
Le réel T est appelé la période radioactive ou la demi-vie de ce corps radioactif.
3. On a pu observer que, pour le carbone 14, on a :
$$\lambda \simeq 1,21 \times 10^4$$
   (a) Déterminer la période en années du carbone 14.
   (b) Dans une carrière d'une chaîne volcanique, on a retrouvé des bois carbonisés pris dans des projections de l'un des volcans. L'étude de ces échantillons de bois fossiles a montré que leur teneur en carbone 14 est égale à 25% de celle des échantillons de bois actuels frais et de même masse. Déterminer l'âge de l'événement volcanique.

Exercice 20.

1. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :
$$f(x) = \left(2x^3 - 4x^2\right) \mathrm{e}^{-x}.$$
   (a) Déterminer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$.
   (b) Calculer $f'(x)$ et montrer que $f'(x) = 2x\left(-x^2 + 5x - 4\right) \mathrm{e}^{-x}$.
   (c) Dresser le tableau de variations de f.
   (d) Tracer la courbe $\mathscr{C}$ représentative de f dans un repère orthonormal $(O;\vec{i},\vec{j})$ (unité graphique : 1 cm).
2. Soit u une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.
   On définit la fonction v sur $]0\ ;\ +\infty[$ par $v(x) = u\left(\dfrac{1}{x}\right)$.
   (a) On suppose que u est croissante sur l'intervalle $[a\ ;\ b]$ (où $0 < a < b$).
   Déterminer le sens de variation de v sur $\left[\dfrac{1}{b}\ ;\ \dfrac{1}{a}\right]$.
   (b) On définit maintenant la fonction g par $g(x) = f\left(\dfrac{1}{x}\right)$ sur $]0\ ;\ +\infty[$, où f est la fonction définie dans la question 1.
   Déterminer les limites de g en 0 et en $+\infty$,
   (c) Déduire des questions précédentes le tableau de variations de la fonction g sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$.

Exercice 21.

Six affirmations, réparties en deux thèmes et numérotées de 1. a à 2. c sont proposées ci-dessous. Le candidat portera sur sa copie, en regard du numéro de l'affirmation, et avec le plus grand soin, la mention VRAI ou FAUX. Chaque réponse convenable rapporte 0,4 point. Chaque réponse erronée enlève 0,1 point. Il n'est pas tenu compte de l'absence de réponse. Un éventuel total négatif est ramené à 0.

1. Pour tout réel x, e^x désigne l'image de x par la fonction exponentielle.

Affirmation 1. a	Pour tous les réels a et b : $(\mathrm{e}^a)^b = \mathrm{e}^{\left(a^b\right)}$.
Affirmation 1. b	Pour tous les réels a et b : $\mathrm{e}^{a-b} = \dfrac{\mathrm{e}^a}{\mathrm{e}^b}$.
Affirmation 1. c	La droite d'équation $y = x + 1$ est la tangente en 1 à la courbe de la fonction exponentielle.

2. Soit f une fonction numérique définie sur un intervalle ouvert I et soit a un élément de I.

Affirmation 2. a	Si f est dérivable en a, alors f est continue en a.
Affirmation 2. b	Si f est continue en a, alors f est dérivable en a.
Affirmation 2. c	Si f est dérivable en a, alors la fonction $h \mapsto \dfrac{f(a+h) - f(a)}{h}$ admet une limite finie en 0.

Exercice 22. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par
$$f(x) = \frac{x}{\mathrm{e}^x - x}.$$

On note $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans le plan rapporté au repère orthogonal $(O;\vec{i},\vec{j})$, l'unité graphique est 2 cm sur l'axe des abscisses et 5 cm sur l'axe des ordonnées.

Partie A
Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = \mathrm{e}^x - x - 1$.

1. Étudier les variations de la fonction g sur $\mathbb{R}$. En déduire le signe de g.
2. Justifier que pour tout x, $(\mathrm{e}^x - x)$ est strictement positif.

Partie B

1. (a) Calculer les limites de la fonction f en $+\infty$ et en $-\infty$.
   (b) Interpréter graphiquement les résultats précédents.

2. (a) Calculer $f'(x)$, f' désignant la fonction dérivée de f.
   (b) Étudier le sens de variations de f puis dresser son tableau de variations.
3. (a) Déterminer une équation de la tangente T à la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 0.
   (b) À l'aide de la **partie A**, étudier la position de la courbe $\mathscr{C}$ par rapport à la droite T.
4. Tracer la droite T, les asymptotes et la courbe $\mathscr{C}$.

Exercice 23. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \frac{x}{\mathrm{e}^x - x}.$$

On note $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans le plan rapporté au repère orthogonal $(O; \vec{i}, \vec{j})$, l'unité graphique est 2 cm sur l'axe des abscisses et 5 cm sur l'axe des ordonnées.

Partie A

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = \mathrm{e}^x - x - 1$.

1. Étudier les variations de la fonction g sur $\mathbb{R}$. En déduire le signe de g.
2. Justifier que pour tout x, $(\mathrm{e}^x - x)$ est strictement positif.

Partie B

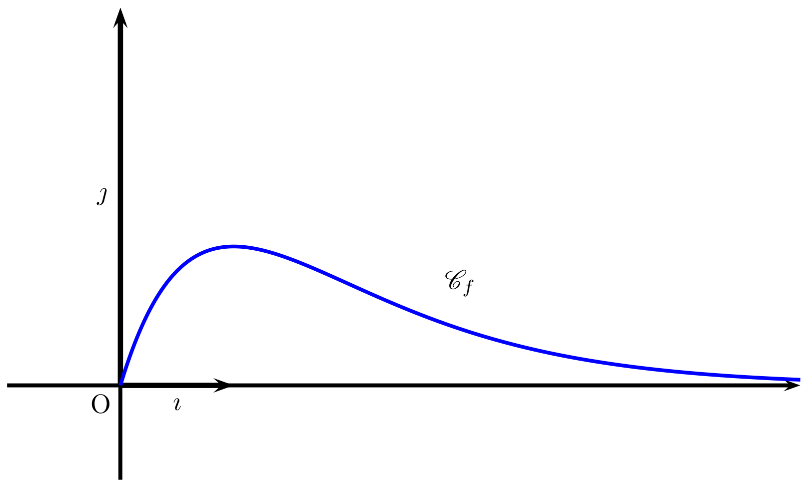
1. (a) Calculer les limites de la fonction f en $+\infty$ et en $-\infty$.
   (b) Interpréter graphiquement les résultats précédents.
2. (a) Calculer $f'(x)$, f' désignant la fonction dérivée de f.
   (b) Étudier le sens de variations de f puis dresser son tableau de variations.
3. (a) Déterminer une équation de la tangente T à la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 0.
   (b) À l'aide de la **partie A**, étudier la position de la courbe $\mathscr{C}$ par rapport à la droite T.
4. Tracer la droite T, les asymptotes et la courbe $\mathscr{C}$.

Exercice 24. Soient f et g les fonctions définies sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$ par

$$f(x) = x\mathrm{e}^{-x} \quad \text{et} \quad g(x) = x^2\mathrm{e}^{-x}.$$

On note $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ les représentations graphiques des fonctions f et g dans le plan muni d'un repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$. La courbe représentative $\mathscr{C}_f$ de la fonction f dans un repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$ est donnée en annexe (à rendre avec la copie).

1. D'après le graphique, quelles semblent être les variations de la fonction f et sa limite en $+\infty$?
2. Valider ces conjectures à l'aide d'une démonstration.
3. Tracer sur l'annexe jointe (à rendre avec la copie) la courbe $\mathscr{C}_g$ représentative de la fonction g.
4. Quelle semble être la position relative de la courbe $\mathscr{C}_f$ par rapport à la courbe $\mathscr{C}_g$? Valider cette conjecture à l'aide d'une démonstration.



<u>Exercice</u> 25.

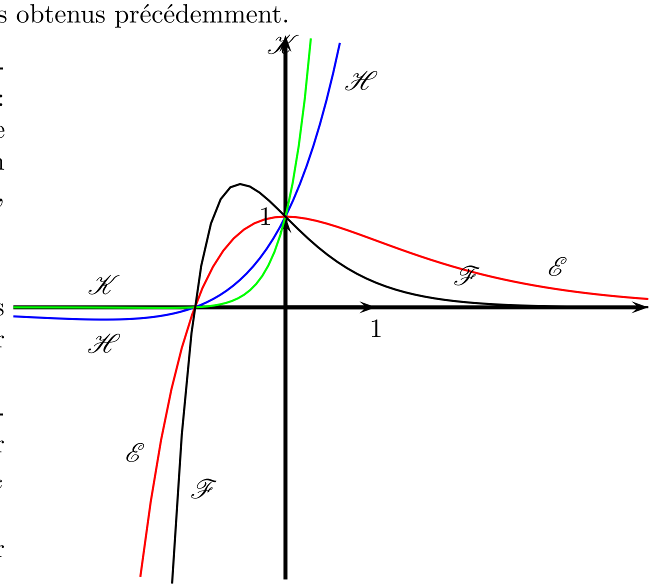
A - Restitution organisée de connaissances

On suppose connu le résultat suivant : $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\mathrm{e}^x}{x} = +\infty$. Démontrer que : $\lim\limits_{x\to+\infty} x\mathrm{e}^{-x} = 0$.

B - étude d'une fonction On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = (x+1)\mathrm{e}^{-x}$. On note $\mathscr{C}$ sa représentation graphique dans un repère orthonormé $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$ du plan. On prendra 4 cm pour unité graphique.

1. *Cette question demande le développement d'une certaine démarche comportant plusieurs étapes. La clarté du plan d'étude, la rigueur des raisonnements ainsi que la qualité de la rédaction seront prises en compte dans la notation.*
   Etudier les variations de la fonction f et les limites aux bornes de son ensemble de définition. Résumer ces éléments dans un tableau de variations le plus complet possible.
2. Tracer la courbe $\mathscr{C}$. On fera apparaître les résultats obtenus précédemment.

C - étude d'une famille de fonctions Pour tout entier relatif k, on note f_k la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f_k(x) = (x+1)\mathrm{e}^{kx}$. On note $\mathscr{C}_k$ la courbe représentative de la fonction f_k dans un repère orthonormal du plan. On remarque que le cas $k = -1$ a été traité dans la partie B, car on a $f_{-1} = f$ et $\mathscr{C}_{-1} = \mathscr{C}$.



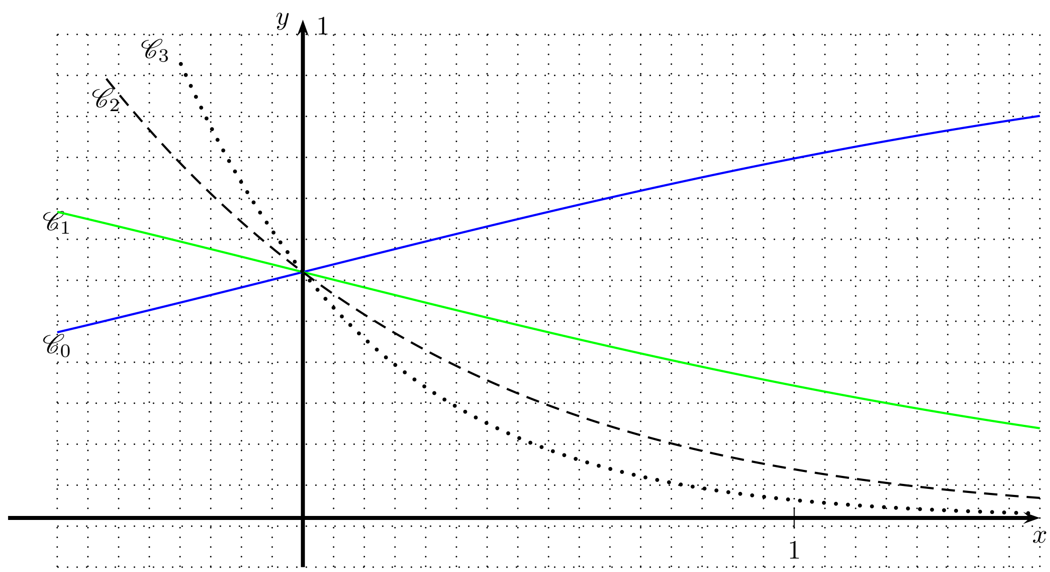
1. (a) Quelle est la nature de la fonction f_0 ?
   (b) Déterminer les points d'intersection des courbes $\mathscr{C}_0$ et $\mathscr{C}_1$. Vérifier que, pour tout entier k, ces points appartiennent à la courbe $\mathscr{C}_k$.
2. Etudier, suivant les valeurs du réel x, le signe de l'expression : $(x+1)(\mathrm{e}^x - 1)$. En déduire, pour k entier relatif donné, les positions relatives des courbes $\mathscr{C}_k$ et $\mathscr{C}_{k+1}$.
3. Calculer $f'_k(x)$ pour tout réel x et pour tout entier k non nul.
   En déduire le sens de variation de la fonction f_k suivant les valeurs de k. (On distinguera les cas : $k > 0$ et $k < 0$.)

4 Le graphique suivant représente quatre courbes $\mathscr{E}$, $\mathscr{F}$, $\mathscr{H}$, et $\mathscr{K}$, correspondant à quatre valeurs différentes du paramètre k, parmi les entiers -1, -3, 1 et 2.
Identifier les courbes correspondant à ces valeurs en justifiant la réponse.

Exercice 26. Soit n un entier naturel. On note f_n, la fonction définie sur l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels par :

$$f_n(x) = \frac{\mathrm{e}^{-nx}}{1+\mathrm{e}^{-x}}.$$

On note $\mathscr{C}_n$ la courbe représentative de f_n dans un repère orthogonal $(O;\vec{i},\vec{j})$.
Les courbes $\mathscr{C}_0$, $\mathscr{C}_1$, $\mathscr{C}_2$ et $\mathscr{C}_3$ sont représentées ci-dessous :



1. Démontrer que pour tout entier naturel n les courbes $\mathscr{C}_n$ ont un point A en commun. On précisera ses coordonnées.
2. Etude de la fonction f_0
   (a) Etudier le sens de variation de f_0.
   (b) Préciser les limites de la fonction f_0 en $-\infty$ et $+\infty$. Interpréter graphiquement ces limites.
   (c) Dresser le tableau de variation de fonction f_0 sur $\mathbb{R}$.
3. Etude de la fonction f_1
   (a) Démontrer que $f_0(x) = f_1(-x)$ pour tout nombre réel x.
   (b) En déduire les limites de la fonction f_1 en $-\infty$ et $+\infty$, ainsi que son sens de variation.
   (c) Donner une interprétation géométrique de 3. a. pour les courbes $\mathscr{C}_0$ et $\mathscr{C}_1$.
4. Etude de la fonction f_n pour $n \geqslant 2$
   (a) Vérifier que pour tout entier naturel $n \geqslant 2$ et pour tout nombre réel x, on a :
   $$f_n(x) = \frac{1}{\mathrm{e}^{nx}+\mathrm{e}^{(n-1)x}}.$$
   (b) Etudier les limites de la fonction f_n en $-\infty$ et en $+\infty$.
   (c) Calculer la dérivée $f_n'(x)$ et dresser le tableau de variations de la fonction f_n sur $\mathbb{R}$.

Exercice 27.

1. Résoudre l'équation différentielle $2y' + y = 0 \quad$ (E), dont l'inconnue est une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.
2. On considère l'équation différentielle :
   $$2y' + y = \mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}(x+1) \quad (\mathrm{E}')$$

(a) Déterminer deux réels m et p tels que la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}\left(mx^2 + px\right) \text{ soit solution de (E}'\text{).}$$

(b) Soit g une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.
Montrer que g est solution de l'équation (E′) si et seulement si $g - f$ est solution de l'équation (E).
Résoudre l'équation (E′).

3. Etudier les variations de la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par : $h(x) = \dfrac{1}{4}\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}\left(x^2 + 2x\right)$.
4. Déterminer les limites en $-\infty$ et en $+\infty$ de la fonction h.
5. Dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$, on note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de h et Γ celle de la fonction : $x \longmapsto \mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}$.
   (a) Etudier les positions relatives de $\mathscr{C}$ et Γ.
   (b) Tracer ces deux courbes sur un même graphique.

<u>Exercice</u> 28. *Courbes de Gauss*
Soit $k \in \mathbb{R}^{+*}$. On définit sur $\mathbb{R}$ la fonction G_k par :

$$G_k(x) = e^{-kx^2}$$

1. Etudier la parité de G_k
2. Démontrer que G_k est dérivable et calculer sa dérivée. En déduire le tableau de variation de G_k.
3. Calculer $G_k''(x)$ et résoudre $G_k''(x) = 0$.
4. Tracer les courbes de G_k pour $k = \dfrac{1}{2}$, pour $k = 1$ et pour $k = 2$.
5. Démontrer que :
$$h \leq k \Longleftrightarrow G_h \geq G_k \qquad \text{sur}\mathbb{R}$$
6. Dans cette question $k = \dfrac{1}{2}$. Soit α la solution positive de l'équation $G_k''(x) = 0$.
Déterminer une équation de la tangente T à la courbe de G_k au point d'abscisse α. Tracer T sur le graphique.