

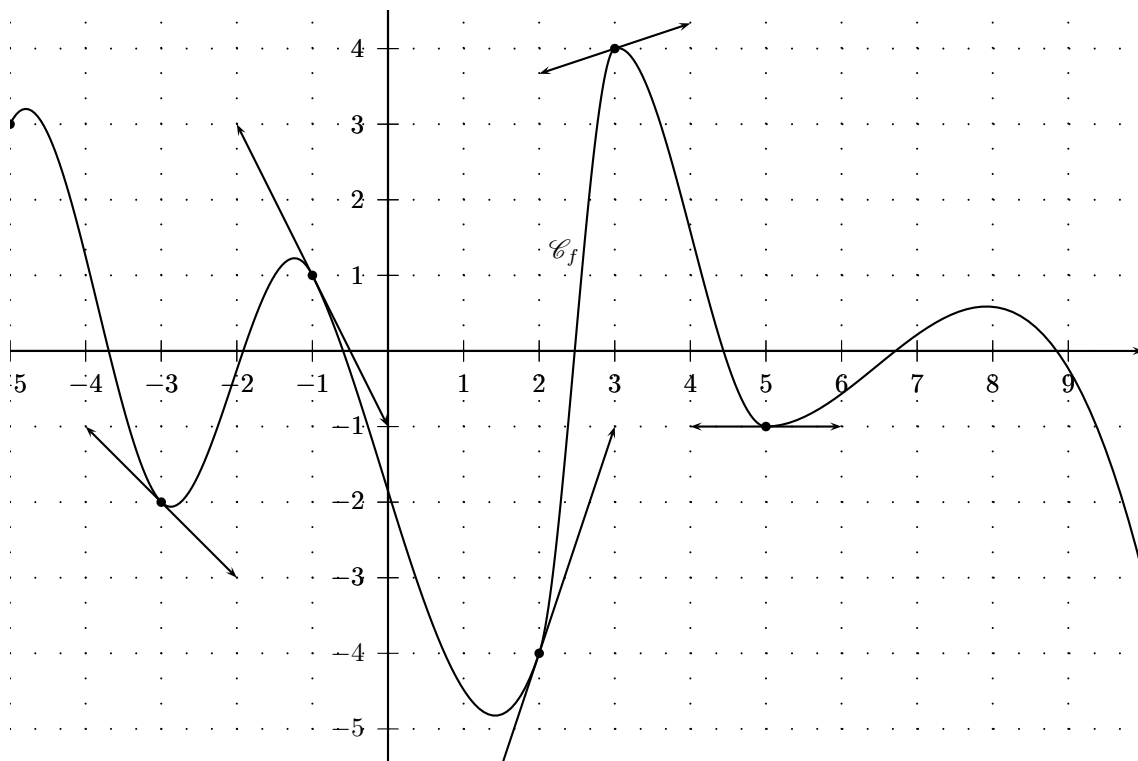
## Exercices : Dérivabilité

**Exercice 1.** La représentation graphique  $\mathcal{C}_f$  d'une fonction  $f$  est donnée ci-dessous. En chacun des points indiqués,  $\mathcal{C}_f$  admet une tangente qui est tracée.

1. Lisez, en vous servant du quadrillage, les nombres dérivés :

$$f'(-3) \quad f'(-1) \quad f'(2) \quad f'(3) \quad f'(5)$$

2. Donner un encadrement de  $f'(x)$  sur  $[2; 3]$ .



**Exercice 2.**

- Déterminer une équation de la tangente au point d'abscisse  $a$  à la parabole  $\mathcal{P}$  d'équation  $y = x^2 - 4x + 5$ .
- En quels point de  $\mathcal{P}$  peut-on mener une tangente issue de l'origine? Vérifier sur un dessin.

**Exercice 3.**

1. Justifier, pour  $x$  voisin de 0, chacune des approximations suivantes :

$$(1+x)^3 \simeq 1+3x \quad \sqrt{1+x} \simeq 1+\frac{x}{2} \quad \frac{1}{1+x} \simeq 1-x \quad \sin x = x \quad \cos x \simeq 1$$

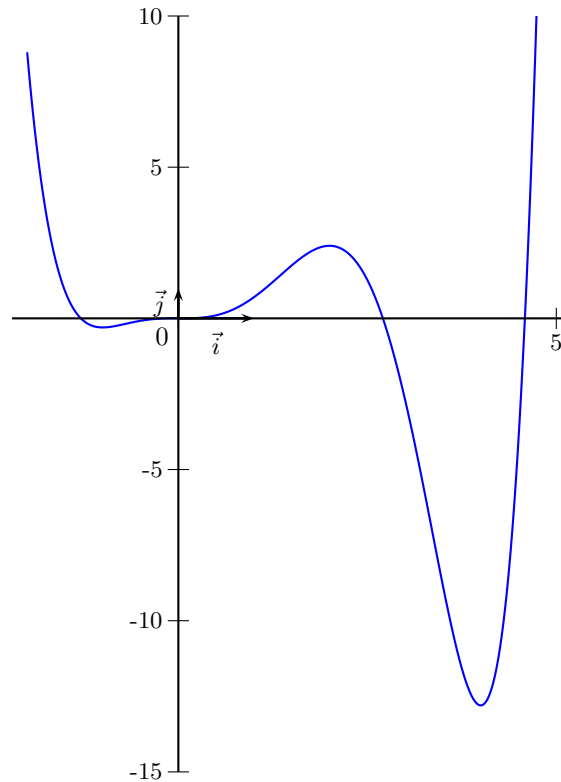
2. En déduire, sans calculatrice, une valeur approchée des nombres suivants :

$$\begin{array}{llll} A = 1,005^3 & C = \sqrt{0,996} & E = \frac{1}{1,0007} & G = \cos 0,02 \\ B = \sqrt{1,0002} & D = \frac{1}{0,997} & F = \sin(-0,01) & \end{array}$$

**Exercice 4.** La courbe ci-dessous est la représentation graphique de la fonction

$$f : x \mapsto 0,05(x^6 - 6x^5 + 3x^4 + 16x^3)$$

1. Lire graphiquement le signe de  $f'(x)$  sur  $[-2; 5]$
2. Préciser en quels points  $f$  admet un extremum relatif.



**Exercice 5.** Déterminer les intervalles sur lesquels la fonction  $f$  est dérivable, puis étudier les variations de  $f$ .

- |                                   |   |   |
|-----------------------------------|---|---|
| 1. $f(x) = x^3 - 3x + 2$          | 6. $f(x) = \frac{x^2 + 2x + 1}{x + 1}$      | 10. $f(x) = \sqrt{x}(x - 1)$                      |
| 2. $f(x) = 2x^3 + 5x^2 - 1$       | 7. $f(x) = 3 - \cos^2 x$ sur $[0; \pi]$     | 11. $f(x) = -x^3 + x^2$                           |
| 3. $f(x) = x^2(x - 1)^3$          | 8. $f(x) = \frac{1}{\sin x}$ sur $]0; \pi[$ | 12. $f(x) = x^2 + \frac{2}{x}$ sur $]0; +\infty[$ |
| 4. $f(x) = x^4 - 4x$              | 9. $f(x) = x - 9\sqrt{x}$                   |   |
| 5. $f(x) = \frac{2x - 3}{3x + 1}$ |   |   |

**Exercice 6.** On pose, pour tout  $x \geq 0$  et  $n \geq 0$ ,

$$f_n(x) = x^n \sqrt{x}$$

Montrer que  $f_n$  est dérivable sur  $]0; +\infty[$  et exprimer  $f'_{n+1}(x)$  en fonction de  $f_n(x)$ .

**Exercice 7.** Montrer que la fonction  $f$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  et calculer sa dérivée :

- |                          |                                 |                                      |
|--------------------------|---------------------------------|--------------------------------------|
| 1. $f(x) = \cos x^2$     | 3. $f(x) = \sqrt{x^2 - 3x + 5}$ | 5. $f(x) = \sqrt{5 + \sin x}$        |
| 2. $f(x) = \cos(\cos x)$ | 4. $f(x) = \sqrt{x^4 + 1}$      | 6. $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}$ |

**Exercice 8.** Soit  $f$  une fonction dérivable sur un intervalle  $D$  de  $\mathbb{R}$  centré en 0.

- On pose, pour  $x \in D$ ,  $g(x) = f(-x)$ . Calculer  $g'(x)$ .
- Montrer que :
  - Si  $f$  est paire, alors  $f'$  est impaire.
  - Si  $f$  est impaire, alors  $f'$  est paire.
- Montrer que :
  - Si  $f'$  est impaire, alors  $f$  est paire.
  - Si  $f'$  est paire et  $f(0) = 0$  alors  $f$  est impaire.

**Exercice 9.** On considère la fonction  $f$  définie sur  $[0; +\infty[$  par :

$$f(x) = x\sqrt{x} - \frac{3}{16}x^2$$

- Déterminer une équation de la tangente à  $\mathcal{C}_f$  au point  $A$  d'abscisse 4.
- Etudier la position de  $\mathcal{C}_f$  par rapport à cette tangente.
- Dessiner la situation correspondante.

**Exercice 10.** Etudier le signe de  $g(x) = 30x^3 + 19x^2 - 1$  sur  $\mathbb{R}$

**Exercice 11.**

### Plan d'étude d'une fonction

- Ensemble de définition
- Ensemble d'étude, propriétés géométriques de la courbe (certaines propriétés, telles que parité ou périodicité, peuvent permettre de réduire l'ensemble sur lequel on étudie la fonction)
- Limites aux bornes de l'ensemble d'étude.
- Dérivabilité, variations
  - On calcule la dérivée de la fonction sur les intervalles où elle existe
  - Son signe fournit le sens de variation.
- Branches infinies (éventuellement)
- Représentation graphique avec quelques points et tangentes remarquables
- Contrôle de certaines propriétés suggérées par la figure, comme la présence d'un élément de symétrie.

Etudier et représenter graphiquement la fonction  $f$  en prenant appui sur le plan d'étude donné précédemment :

- $f(x) = x^3 + 5x^2 - 10$
- $f(x) = \frac{x}{1+x^2}$
- $f(x) = x - 3 + \frac{2}{x+1}$
- $f(x) = x^4 - 2x^2 + 5$

**Exercice 12.** On considère les deux fonctions  $f$  et  $g$  définies sur  $\mathbb{R} - \{-2; 0\}$  par

$$f(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{x+2} \quad \text{et} \quad g(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x+2}$$

- Etudier les limites de  $f$  et de  $g$  aux bornes de leur ensemble de définition. En déduire que les courbes représentatives  $\mathcal{C}_f$  et  $\mathcal{C}_g$  ont les mêmes asymptotes.
- Etudier les variations des fonctions  $f$  et  $g$ .

3. Etudier la position de  $\mathcal{C}_f$  par rapport à sa tangente en  $\Omega(-1;0)$ , et les positions respectives des courbes  $\mathcal{C}_f$  et  $\mathcal{C}_g$ .
4. Représenter  $\mathcal{C}_f$  et  $\mathcal{C}_g$  dans un même repère  $(O; \vec{i}, \vec{j})$
5. Montrer que  $\Omega$  est centre de symétrie de  $\mathcal{C}_f$  et  $(\Omega, \vec{j})$  axe de symétrie de  $\mathcal{C}_g$

**Exercice 13.** On considère la fonction

$$f : x \mapsto x + \sqrt{x^2 + 1}$$

1. Vérifier que  $f$  est définie sur  $D = ]-\infty, -1[ \cup ]1, +\infty[$  et montrer que pour tout  $x \in D$  :

$$f(x)f(-x) = -1 \tag{1}$$

2. Etudier la limite de  $f$  en  $+\infty$ , puis déduire de (1) celle de  $f$  en  $-\infty$ .
3. Montrer que la droite  $\Delta$ , d'équation  $y = 2x$ , est asymptote à  $\mathcal{C}_f$  en  $+\infty$ . On pourra à nouveau utiliser (1).
4. Etudier la dérivabilité de  $f$  en 1 et en  $-1$ .
5. Tracer  $\mathcal{C}_f$  et  $\Delta$

**Exercice 14. L'ellipse et l'hyperbole**<sup>1</sup>

On considère les courbes  $\mathcal{E}$  et  $\mathcal{H}$ , d'équations respectives dans un repère orthonormal :

$$\mathcal{E} : \frac{x^2}{5^2} + \frac{y^2}{3^2} = 1 \quad \text{et} \quad \mathcal{H} : \frac{x^2}{5^2} - \frac{y^2}{3^2} = 1$$

1. Indiquer à l'aide de quelle transformation géométrique on peut obtenir  $\mathcal{E}$  et  $\mathcal{H}$  à partir des représentations graphiques  $\mathcal{C}_f$  et  $\mathcal{C}_g$  des fonctions suivantes :

$$f : x \mapsto \frac{3}{5}\sqrt{25 - x^2} \quad \text{et} \quad g : x \mapsto \frac{3}{5}\sqrt{x^2 - 25}$$

2. Etudier la fonction  $f$  (ensemble de définition, parité, variations, dérivabilité au point 5).
3. Etudier la fonction  $g$  (mêmes questions). Montrer en outre que  $\mathcal{C}_g$  admet en  $+\infty$  l'asymptote  $\Delta : y = \frac{3}{5}x$ .
4. Représenter sur un même dessin  $\mathcal{C}_f$  et  $\mathcal{C}_g$ , puis  $\mathcal{E}$  et  $\mathcal{H}$ .

**Exercice 15. La fonction exponentielle**<sup>2</sup>

De nombreux phénomènes d'évolution sont modélisés par une fonction dérivable  $f$  dont la dérivée  $f'$  est proportionnelle à la fonction  $f$  elle-même. Nous allons observer l'une d'entre elles par la méthode d'Euler.

Soit  $f$  une fonction dérivable sur  $\mathbb{R}$  vérifiant  $f(0) = 1$  et pour tout  $x$   $f'(x) = f(x)$

1. Montrer que, pour tous réels  $a$  et  $h$  ( $h$  voisin de zéro), l'approximation affine donnée par le calcul des dérivées s'écrit :

$$f(a+h) \simeq f(a)(1+h)$$

2. En déduire que, si l'on part de  $f(a)$ , la suite des valeurs approchées de  $f(x)$  obtenus par la méthode d'Euler<sup>3</sup>, avec le pas  $h$ , est une suite géométrique. Quelle est sa raison ?
3. Déduire de la question 2. que  $f(1) \simeq \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$  pour les grandes valeurs de  $n$ . Donner la valeur approchée de  $f(1)$  correspondant à  $n = 10000$ .

1. C'est le grec Apollonios de Perga (262-180 av J.C) qui étudie les paraboles, les ellipses et les hyperboles comme sections planes d'un cône - il les nomme coniques. Dix huit siècles plus tard, Newton démontre les lois de l'attraction universelle qui prouvent que les corps du système solaire décrivent des coniques.

2. La fonction  $f$ , appelée exponentielle sera étudiée ultérieurement

3. Il s'agit, grâce à l'approximation  $f(a+h) \simeq f(a) + f'(a)h$   
 - d'obtenir une valeur approchée de  $f(x)$  pour certains  $x$ .  
 - de construire la courbe  $\mathcal{C}_f$  de façon approchée.

4. Tracer une approximation de la courbe  $\mathcal{C}_f$

**Exercice 16. La fonction logarithme népérien**

Soit  $f$  une fonction vérifiant  $f(1) = 0$  et pour tout  $x > 0$ ,  $f'(x) = \frac{1}{x}$

1. Calculer une valeur approchée de  $f(2)$ ,  $f(3)$ ,  $f(4)$ ,  $f(5)$  et  $f(6)$ .
2. Construire une approximation de la courbe  $\mathcal{C}_f$  sur  $[1; 6]$ .

**Exercice 17.** On considère la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par

$$f(x) = \frac{x^3 - 4}{x^2 + 1}$$

et on note  $\mathcal{C}_f$  sa représentation graphique dans un repère orthonormal (unité : 1 cm).

1. **Etude d'une fonction auxiliaire  $g$  où  $g(x) = x^3 + 3x + 8$** 
  - (a) Etudier le sens de variation de  $g$ , et montrer que l'équation  $g(x) = 0$  admet sur  $\mathbb{R}$  une unique solution  $\alpha$  dont on donnera un encadrement d'amplitude 0, 1.
  - (b) Préciser le signe de  $g(x)$  selon les valeurs de  $x$ .
2. (a) Calculer  $f'(x)$  et étudier le sens de variation de  $f$ .  
 (b) Etudier les limites de  $f$  en  $+\infty$  et en  $-\infty$ , puis dresser le tableau de variations de  $f$ .
3. (a) Montrer qu'il existe quatre réels  $a$ ,  $b$ ,  $c$  et  $d$  tels que :  $f(x) = ax + b + \frac{cx + d}{x^2 + 1}$   
 (b) En déduire que  $\mathcal{C}_f$  admet une asymptote oblique  $\Delta$ , et étudier la position de  $\mathcal{C}$  par rapport à  $\Delta$ . Vérifier en particulier que  $\mathcal{C}_f$  rencontre  $\Delta$  en un unique point de  $A$ .
4. Déterminer les abscisses des points  $B$  et  $B'$  de  $\mathcal{C}_f$  admettant une tangente parallèle à  $\Delta$ .
5. (a) Vérifier que  $f(\alpha) = \frac{3}{2}\alpha$ ; en déduire une valeur approchée de  $f(\alpha)$ .  
 (b) Tracer  $\Delta$  et  $\mathcal{C}_f$  en plaçant les points  $A$ ,  $B$  et  $B'$ , ainsi que les points  $I$ ,  $J$  et  $K$  d'abscisses respectives 1, 2, et  $-1$  avec leurs tangentes.

**Exercice 18.** Soient  $f$  et  $g$  deux fonctions dérivables sur l'intervalle  $I = [0; 1]$  telles que  $f(0) = g(0)$  et  $f' \leq g'$  sur  $I$ . Démontrer que  $f \leq g$  sur  $I$  (On pourra étudier les variations de  $g - f$ )

**Exercice 19.** On se propose d'étudier la limite en  $\frac{\pi}{2}$  de la fonction  $f$  définie par :

$$f(x) = \frac{\cos x}{x - \frac{\pi}{2}} \quad \forall x \neq \frac{\pi}{2}$$

1. Vérifier que l'on est en présence d'une forme indéterminée.
2. Rappeler le taux d'accroissement de  $f$  en  $\frac{\pi}{2}$ , puis déterminer la limite ci-dessus.

**Exercice 20.** En s'inspirant de l'exercice précédent, étudier les limites de  $f$  en  $a$  dans les cas suivants :

$$1. f(x) = \frac{\sqrt{1+x} - 1}{x} \quad \text{en } a = 0 \qquad 2. f(x) = \frac{\tan x - 1}{x - \frac{\pi}{4}} \quad \text{en } a = \frac{\pi}{4}$$