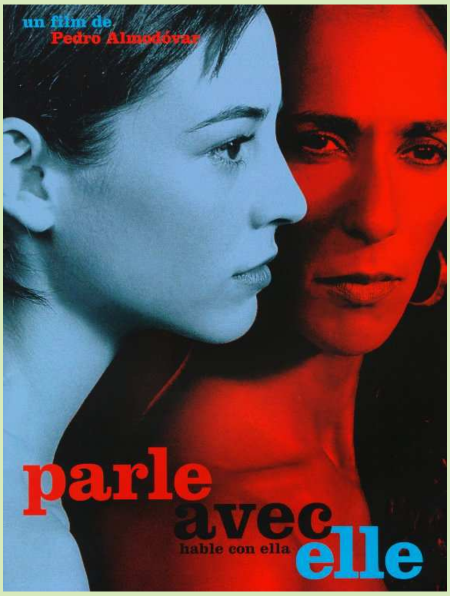
Chapitre 4

Dérivabilités

Hors Sujet



Titre : « Parle avec elle »
Auteur : Pedro Almodovar
Présentation succinte de l'auteur : Pedro Almodóvar Caballero est né le 24 septembre 1949 à Calzada de Calatrava, dans la province de Ciudad Real et la communauté autonome de Castille-La Manche, en Espagne. À 8 ans, il émigre avec sa famille en Estrémadure. Il y fait ses études secondaires qu'il poursuit chez les Franciscains. Comme Vargas Llosa il fait preuve de guidisme. Vers 16 ans il quitte sa maison seul pour s'installer à Madrid, sans argent et sans travail, mais avec un projet très concret : étudier le cinéma et en faire son métier. Il lui est impossible de s'inscrire à l'école officielle du cinéma puisque Franco vient juste de la fermer. Dans la mesure où il ne peut apprendre le langage cinématographique, Almodóvar décide d'en apprendre le fond en multipliant ses expériences artistiques personnelles dans différents domaines. Malgré la dictature, Madrid représente, pour un adolescent provincial, la culture, l'indépendance et la liberté. Il fait de nombreux petits boulots et s'achète sa première caméra super 8 après avoir décroché un emploi à la Compagnie nationale de téléphone d'Espagne. Il y travaille douze ans comme employé de bureau. Le matin, à la Compagnie de téléphone, il apprend à connaître la classe moyenne espagnole qui vit les débuts de la société de consommation, avec ses grands drames et ses petites misères. Le soir et la nuit, il écrit, fait du théâtre avec la compagnie indépendante Los Goliardos et tourne des films en super 8. Il collabore à diverses revues underground, écrit des nouvelles dont certaines sont publiées. Il a aussi réalisé des romans-photo au cours de sa jeunesse. Il fait également partie d'une troupe de théâtre amateur (référence à cette période dans Tout sur ma mère) et fait partie d'un groupe punk-rock avant de commencer sa carrière cinématographique.

Document réalisé à l'aide de LaTeX
Auteur : D. Zancanaro
Site : wicky-math.fr.nf
Lycée : Jean Durand (Castelnaudary)

Table des matières

« *Télécharger c'est tuer l'industrie, tuons les tous* »
THURSTON MOORE (SONIC YOUTH)

Leçon 4

Dérivabilités

Résumé

Les notions de continuité et de dérivabilité, et par suite d'intégration sont apparus tardivement dans l'histoire des mathématiques ($XVII^{\text{ème}}$ siècle) et ont permis de résoudre de nombreux problèmes auxquels les méthodes classiques n'offraient pas de solution générale comme le calcul de la vitesse instantanée, la recherche de trajectoire d'un objet en mouvement, le calcul de la longueur de la trajectoire d'une planète, le calcul de l'aire limitée par des courbes, ... Ce n'est qu'au siècle dernier que les mathématiciens ont travaillé avec rigueur en utilisant ces nouveaux objets, en effet ils se sont longtemps contentés d'utiliser des définitions intuitives.

Toutes les fonctions considérées dans ce chapitre sont définies sur $\mathbb{R}$ ou une partie de $\mathbb{R}$ et sont à valeurs dans $\mathbb{R}$. Les intervalles considérés sont non vides et non réduits à un point.

I) Dérivée d'une fonction en un point

I-1 Définitions et premières remarques

Définition 1 :

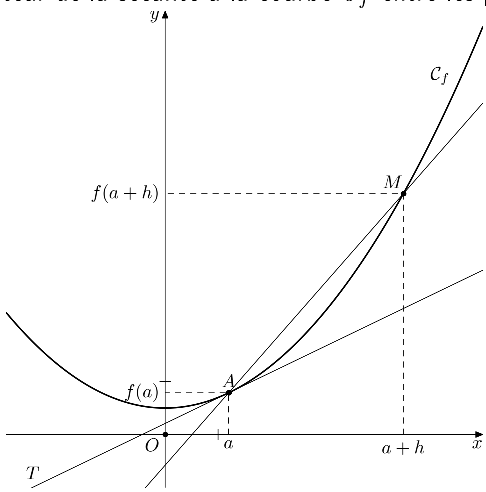
Soit f une fonction définie sur un intervalle I et a un point de I.
On dit que f est dérivable en a lorsque le taux d'accroissement de f en a admet une limite ℓ en a i.e :

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \ell \qquad \text{ou} \qquad \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \ell$$

Dans ce cas, ℓ est appelé le nombre dérivé de f en a, et on le note $f'(a)$.

Vocabulaire :

– La quantité $\dfrac{f(a+h) - f(a)}{h}$ (ou $\dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$) s'appelle le taux d'accroissement de f en a. Graphiquement elle représente le coefficient directeur de la sécante à la courbe $\mathscr{C}_f$ entre les points d'abscisses a et $a + h$



– La définition précédente peut aussi se traduire par : f est dérivable en a si et seulement si l'accroissement de f en a admet une limite finie lorsque x tend vers a (ou lorsque h tend vers 0.

– Lorsque f est dérivable en a, nous pouvons écrire :

$$f(a+h)-f(a)=hf'(a)+h\phi(h) \qquad \text{avec } \lim_{h\to 0}\phi(h)=0$$

Ce qui revient à écrire, en posant $h=x-a$:

$$f(x)-f(a)=f'(a)(x-a)+(x-a)\phi(x-a) \qquad \text{avec } \lim_{x\to a}\phi(x-a)=0$$

– Si f est dérivable en a, on peut utiliser la relation précédente et on obtient :

$$\lim_{x\to a} f(x)-f(a)=0 \iff \lim_{x\to a} f(x)=f(a) \iff f \text{ est continue en } a$$

Ainsi, **toute fonction dérivable en a est continue en a**, la réciproque est fausse.

– Les physiciens expriment volontiers une variation à l'aide du symbole Δ ; ils notent ainsi $\Delta x = x-a$ et $\Delta y = f(x)-f(a)$.
Avec ces notations, on obtient :

$$\Delta y = f'(a)\Delta x + \Delta x \phi(\Delta x) \qquad \text{où } \phi \text{ tend vers 0 quand } \Delta x \longrightarrow 0$$

Nous exprimerons symboliquement cette égalité par :

$$dy = f'(a)dx \qquad i.e \qquad f'(a)=\frac{dy}{dx}(a) \qquad \text{c'est la notation différentielle}$$

Exemple :

1. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=x^2$. Etudions sa dérivabilité en 0.
Pour cela on calcule le taux d'accroissement entre 0 et $0+h$:

$$\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=\frac{h^2+2h+1-1}{h}=h+2$$

La limite de ce taux d'accroissement lorsque h tend vers 0 est é, par conséquent f est dérivable en 0 et $f'(1)=2$.

2. On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}^+$ par $g(x)=\sqrt{x}$. Etudions sa dérivabilité en 0.
Pour cela on calcule le taux d'accroissement entre 0 et $0+h$:

$$\frac{g(0+h)-g(0)}{h}=\frac{\sqrt{h}-0}{h}=\frac{\sqrt{h}}{h}=\frac{1}{\sqrt{h}}$$

La limite de ce taux d'accroissement lorsque h tend vers 0^+ est $+\infty$, par conséquent g n'est pas dérivable en 0.

3. On considère la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x)=\mid x \mid$. Etudions sa dérivabilité en 0.
Pour cela on calcule le taux d'accroissement entre 0 et $0+h$:

$$\frac{h(0+h)-h(0)}{h}=\frac{\mid h \mid -0}{h}=\frac{\mid h \mid}{h}$$

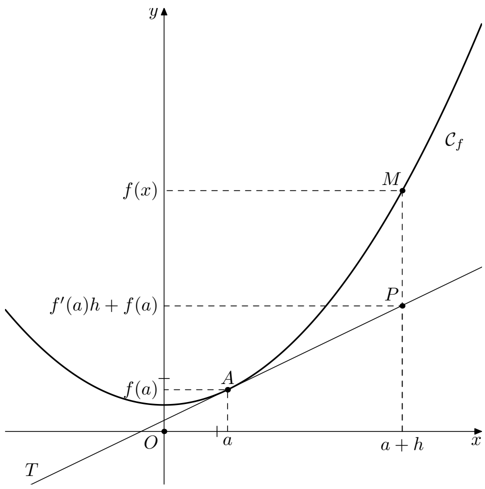
Lorsque $h<0$ ce taux d'accroissement vaut -1 et sa limite lorsque h tend vers 0^- est -1.
En revanche si $h \geq 0$, ce taux d'accroissement vaut 1 et sa limite lorsque h tend vers 0^+ est 1, par conséquent la limite à droite n'est pas égale à la limite à gauche et donc g n'est pas dérivable en 0.

I-2 Différentes interprétations

I-2.1 Interprétation graphique : Tangente

Lorsque f est dérivable en a, la représentation graphique de f admet au point $A(a; f(a))$ une tangente de coefficient directeur $f'(a)$.
Cette tangente a pour équation

$$y = f'(a)(x-a) + f(a)$$



Exercice 1 :

On donne

$$f(x) = -x^2 + 3$$

Donner l'équation de la tangente T au point d'abscisse $a = 2$.

I-2.2 Interprétation numérique : Approximation Affine

On a vu que lorsque f est dérivable en a on a : $f(x) - f(a) = f'(a)(x-a) + (x-a)\phi(x-a)$ avec $\lim\limits_{x\to a} \phi(x-a) = 0$
Autrement dit, lorsque x est proche de a on a

$$f(x) - f(a) \simeq f'(a)(x-a) \Longleftrightarrow f(x) \simeq f'(a)(x-a) + f(a)$$

On dit qu'il s'agit d'une approximation affine de $f(x)$, on l'appelle approximation affine car c'est une approximation de la forme $f(x) = mx + p$, avec $m = f'(a)$ et $p = f(a) - af'(a)$.

I-2.3 Interprétation cinématique : Vitesse

Supposons ici que f représente la loi horaire d'un mobile en déplacement. La vitesse moyenne du mobile entre les instants t_0 et $t_0 + h$ est alors :

$$\frac{f(t_0+h) - f(t_0)}{h}$$

La vitesse instantanée du mobile au moment t_0 est donc donnée par :

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(t_0+h) - f(t_0)}{h} = f'(t_0)$$

Si f est une loi horaire d'un mobile en mouvement, le nombre dérivé en t_0 représente la vitesse instantanée du mobile à l'instant t_0.

II) Fonction dérivée

II-1 Définition

Définition 2 :
Lorsqu'une fonction f admet un nombre dérivé en tout point a d'un intervalle I, on dit que f est dérivable sur I. On définit alors la fonction dérivée, notée f', qui à tout point a de I associe le nombre dérivé $f'(a)$.

Nous savons déjà dériver un certain nombre de fonctions. Se reporter au tableau des dérivées pour en avoir un aperçu.
On montre (voir quelques démonstrations au paragraphe 5) que la somme et le produit de fonctions dérivables (sur un intervalle I) est dérivable (sur I). De même pour le quotient $\dfrac{f}{g}$ de deux fonctions dérivables où g ne s'annule pas sur I. On montrera également que les fonctions du type $x \longmapsto x^n (n \in \mathbb{N})$ sont dérivables sur $\mathbb{R}$.
Ainsi, les fonctions polynômes sont dérivables sur $\mathbb{R}$ et les fonctions rationnelles le sont sur tout intervalle contenu dans leur ensemble de définition.

Théorème 1 :
Toute fonction f dérivable sur un intervalle I est continue sur I.

Remarque :

1. On a déjà démontré ce théorème au début de cette leçon.
2. La réciproque est fausse, prenons l'exemple de la fonction valeur absolue continue sur $\mathbb{R}$ et non dérivable en 0.
3. Une fonction f peut être dérivable (et donc continue) sans que sa dérivée f' soit continue :
Considérons la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = x^2 \sin\frac{1}{x} \text{ si } x \neq 0 \text{ et } f(0) = 0 \text{ si } x = 0$$

Montrons que f est continue en 0 :
Nous avons, pour tout réel $x \neq 0$: $\quad \mid \sin\dfrac{1}{x} \mid \leq 1$
donc, pour tout réel $x \neq 0$: $\quad x^2 \mid \sin\dfrac{1}{x} \mid \leq x^2$
D'après le théorème de comparaison des limites (en 0), on en déduit :

$$\lim_{x\to 0} \mid f(x) \mid = 0$$

Au final :

$$\lim_{x\to 0} f(x) = 0 = f(0)$$

Ce qui prouve que f est continue en 0.
Montrons que f est dérivable en 0 :
Pour tout réel $x \neq 0$, nous avons : $\quad \dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} = x\sin\dfrac{1}{x}$
Or :

$$\lim_{x\to 0} x\sin\frac{1}{x} = 0$$

(on le prouve de la même manière que ci-dessous en écrivant $\mid x\sin\dfrac{1}{x} \mid \leq \mid x \mid$)
Donc f est dérivable en 0 avec $f'(0) = 0$.
Cependant f' n'est pas continue en 0. En effet, pour tout $x \neq 0$, on a :

$$f'(x) = 2x \times \sin\frac{1}{x} + x^2 \times \left(-\frac{1}{x^2}\right)\cos\frac{1}{x} = 2x\sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x}$$

Nous savons que $\lim\limits_{x\to 0} 2x\sin\dfrac{1}{x} = 0$, en revanche la quantité $\cos\dfrac{1}{x}$ n'a pas de limite en 0, donc f' n'a pas de limite en 0 et n'est donc pas continue en 0 ! ! !

II-2 Applications de la dérivation à l'étude de fonction

II-2.1 Variations d'une fonction

Bien qu'intuitivement évident, on admettra le théorème suivant. (Sa démonstration découle en partie du théorème des accroissements finis qui est hors-programme. Ce théorème découle lui-même du théorème de Rolle dont la démonstration repose sur le fait qu'une fonction continue sur un intervalle borné est bornée et atteint ses bornes. Or, cette dernière propriété repose en partie sur le théorème de Bolzano-Weierstrass dont la démonstration ne peut se comprendre qu'après avoir établi un certain nombre d'éléments de topologie de la droite réelle...)

Théorème 2 : ***Lien entre le signe de la dérivée et les variations de la fonction***

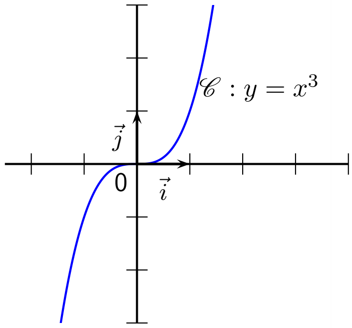
Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I.

1. f est constante sur I si et seulement si $f' = 0$ sur I.
2. f est croissante (resp. décroissante) sur I si et seulement si $f' \geq 0$ (resp. $f' \leq 0$) sur I.
3. f est strictement croissante (resp. strictement décroissante) sur I si et seulement si $f' > 0$ (resp $f' < 0$), sauf peut-être en des points isolés où elle s'annule.

Remarque : Ainsi, l'étude des variations d'une fonction dérivable se ramène à la recherche des intervalles sur lesquels la dérivée f' conserve un signe constant.

Exemple :

1. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3$. Etudions ses variations sur $\mathbb{R}$.
   On se rappelle que $f'(x) = 3x^2 \geq 0$, par conséquent f est une fonction croissante sur $\mathbb{R}$, et même strictement croissante sur $\mathbb{R}$ puisque f' ne s'annule qu'en un point isolé 0 i.e $f(x) > 0 \quad \forall x \neq 0$.



2. Etudions les variations de la fonction $f : x \longmapsto x^3 - 6x^2 + 1$. f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x) = 3x^2 - 12x = 3x(x-4)$, par conséquent on obtient le tableau de variation suivant :

x	$-\infty$		0		4		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
f		$\nearrow$	1	$\searrow$	-31	$\nearrow$	

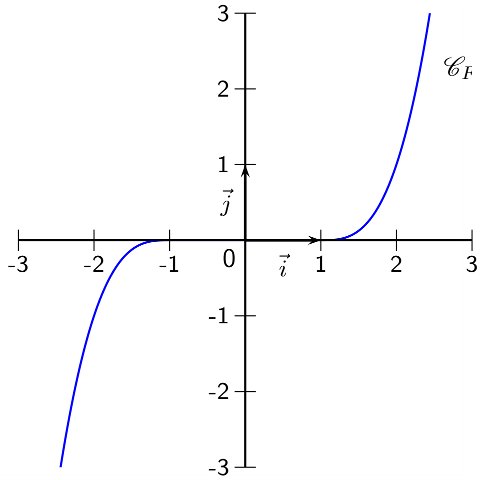
3. On considère maintenant la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x) = \begin{cases} (x+1)^3 & \text{si } x < -1 \\ 0 & \text{si } x \in [-1;1] \\ (x-1)^3 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

   On a :

$$g'(x) = \begin{cases} 3(x+1)^2 & \text{si } x < -1 \\ 0 & \text{si } x \in [-1;1] \\ 3(x-1)^2 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

   La dérivée est donc toujours positive ou nulle, par conséquent la fonction g est croissante sur $\mathbb{R}$ mais non strictement car sa dérivée s'annule sur un intervalle.



II-2.2 Extremums d'une fonction

Corollaire 1 :
Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I. Si f admet un extremum local en un point x_0 intérieur à I alors $f'(x_0) = 0$

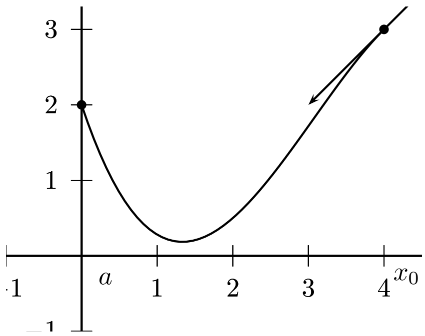
Remarque :
- Si a et b sont les extrémités de l'intervalle I (extrémités pouvant valoir $\pm\infty$) alors l'interieur de I est l'intervalle ouvert $]a;b[$ i.e l'interieur de I est le plus grand intervalle ouvert contenu dans I. Pour que le théorème s'applique x_0 doit appartenir à $]a;b[$.
- Un extremum local est soit un maximum local, soit un minimum local. Une fonction f admet un maximum local en x_0 s'il existe un intervalle ouvert J du type $]x_0-\epsilon;x_0+\epsilon[$ (avec $\epsilon > 0$) tel que pour tout x de J on ait $f(x) \leq f(x_0)$. (On définit de façon analogue un minimum local). Une fonction peut avoir plusieurs maxima sur un même intervalle I. Le plus grand d'entre eux est appelé maximum global de f sur I.
- Dans la pratique, les extrémums locaux sont aisément repérables sur le tableau de variations : ils correspondent aux changements de sens de flèches. Ainsi la fonction de l'exemple 2 de la partie précédente la fonction f admet un maximum local en 0 et un minimum local en 4.

Preuve
Par hypothèse, f est dérivable en x_0 et :

$$f'(x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

Comme x_0 est intérieur à I, il existe $\epsilon > 0$ tel que $]x_0-\epsilon;x_0+\epsilon[$ soit contenu dans I.
Supposons que l'extremum local de f soit un maximum local :
Pour $h \in]0;\epsilon[$, on a : $\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \leq 0$
Pour $h \in]-\epsilon;0[$, on a : $\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \geq 0$
Ceci montre que la dérivée à droite de f en x_0 est négative et que la dérivée à gauche de f en x_0 est positive. Et comme elles sont toutes deux égales à $f'(x_0)$, on a nécessairement $f'(x_0) \leq 0$ et $f'(x_0) \geq 0$ d'où $f'(x_0) = 0$.
Dans le cas où f admet un minimum local, on raisonne de même.

Remarque : Si x_0 est une extrémité de I, la fonction f peut avoir un extremum en x_0 sans nécessairement avoir $f'(x_0) = 0$. C'est ce qu'illustre la figure suivante :



Théorème 3 :
Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I. Soit x_0 un point intérieur à I. Si f' s'annule en x_0 en changeant de signe alors f a un extremum local en x_0.

Remarque : Nous admettrons ce théorème dont la démonstration repose, là encore, sur le théorème des accroissements finis. Les trois théorèmes précédents sont largement exploités dans les exercices notamment lors de la mise en place du tableau de variation d'une fonction.

II-3 Dérivée d'une fonction composée et applications

II-3.1 Théorème des fonctions composées

Comment dériver la fonction $h\ :\ x \mapsto \sqrt{1+x^2}$ définie sur $\mathbb{R}$?

Théorème 4 :

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I.
Soit g une fonction dérivable sur un intervalle J contenant $u(I)$.
La fonction composée $f \circ g$ est dérivable sur I et

$$(f \circ g)'(x) = f'\big(g(x)\big) \times g'(x)$$

Preuve

Soit $x_0 \in I$.
On écrit :

$$\frac{f \circ g(x) - f \circ g(x_0)}{x - x_0} = \frac{f(g(x)) - f(g(x_0))}{g(x) - g(x_0)} \times \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0}$$

Puis en notant $y = g(x)$ et $y_0 = g(x_0)$ on obtient :

$$\frac{f \circ g(x) - f \circ g(x_0)}{x - x_0} = \frac{f(y) - f(y_0)}{y - y_0} \times \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0}$$

Or g étant dérivable en x_0

$$\lim_{x \to x_0} \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} = g'(x_0)$$

Et comme f est dérivable en y_0

$$\lim_{y \to y_0} \frac{f(y) - f(y_0)}{y - y0} = f'(y_0)$$

D'où

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f \circ g(x) - f \circ g(x_0)}{x - x_0} = f'(y_0) \times g'(x_0) = f'(g(x_0)) \times g'(x_0)$$

Ceci étant valable pour tout $x \in I$, on en déduit la dérivabilité de $f \circ g$ sur I et

$$(f \circ g)'(x) = f'\big(g(x)\big) \times g'(x)$$

Appliquez cette formule à notre exemple.
Ici, h est dérivable sur $\mathbb{R}$ car $1 + x^2$ est strictement positif sur $\mathbb{R}$. Avec $f(X) = \sqrt{X}$ et $g(x) = 1 + x^2$, on obtient $f'(X) = \dfrac{1}{2\sqrt{X}}$ et $g'(x) = 2x$, donc

$$h'(x) = \frac{1}{2\sqrt{1+x^2}} \times 2x$$

En fait, on dérive comme si $g(x)$ était une variable et on multiplie par la dérivée de « l'intérieur ».
On obtient comme ça tout un tas de formules rappelées dans le tableau de fin de chapitre.soit u une fonction dérivable sur un intervalle I.

Corollaire 2 :

soit u une fonction dérivable sur un intervalle I.

- Si $f = \sqrt{u}$ (où u est strictement positive sur I) alors f est dérivable sur I et $f' = \dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$
- Si $f = u$ (avec $n \in \mathbb{Z}$ et u ne s'annulant pas sur I si $n < 0$) alors f est dérivable sur I et

$$f' = nu'u^{n-1}$$

Preuve

Il suffit d'appliquer le théorème précédent avec $g = u$

Exercice 2 :

1. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^+$ par :

$$f(x) = \sqrt{x^2 + x}$$

   Déterminer $f'(x)$

2. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \left(2x^2 - x + 1\right)^6$$

   Déterminer $f'(x)$

Application :

Soit f une fonction définie et dérivable sur un intervalle I symétrique par rapport à 0. Démontrer que :

$$f \text{ paire } \Longrightarrow f' \text{ impaire}$$

$$f \text{ impaire } \Longrightarrow f' \text{ paire}$$

On posera $g(x) = -x$

II-3.2 Peut-on étudier les variations d'une fonction sans calculer sa dérivée ?

Grâce au théorème suivant, je réponds oui à la question précédente. En effet, si f et g sont dérivables là où il faut, $(f \circ g)'$ sera du signe du produit des dérivées de f et g. Donc

Corollaire 3 :

Si g est dérivable sur I et f dérivable sur $g(I)$, alors
- La composée de deux fonctions croissantes est croissante
- La composée de deux fonctions décroissante est croissante
- la composée d'une fonction, croissante et d'une fonction décroissante est décroissante

Remarque : C'est comme la règle des signes !

Exemple :

Par exemple, pour la fonction

$$\begin{aligned} f: \ & \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ & x \mapsto \sqrt{1 + \sqrt{1 + x^2}} \end{aligned}$$

La fonction $x \mapsto x^2$ est décroissante sur $\mathbb{R}^-$ et croissante sur $\mathbb{R}^+$. Donc comme la fonction $t \mapsto \sqrt{1+t}$ est croissante, f est décroissante sur $\mathbb{R}^-$ et croissante sur $\mathbb{R}^+$. On a juste utilisé que la composée de deux fonctions croissantes est croissante, et que la composée d'une fonction croissante et d'une fonction décroissante est décroissante.

II-4 Tableaux récapitulatifs des dérivées

Fonction f	**Fonction f'**	**Domaine de définition de f'**
$f(x) = k$ (constante)	$f'(x) = 0$	$\mathbb{R}$
$f(x) = x$	$f'(x) = 1$	$\mathbb{R}$
$f(x) = ax + b$ (a et b réel)	$f'(x) = a$	$\mathbb{R}$
$f(x) = x^n$ ($n \in \mathbb{Z}^*$)	$f'(x) = nx^{n-1}$	$\mathbb{R}$ si $n > 0$ et $\mathbb{R}^*$ sinon
$f(x) = \sqrt{x}$	$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$	$\mathbb{R}^{+*}$
$f(x) = \frac{1}{x}$	$f'(x) = -\frac{1}{x^2}$	$\mathbb{R}^*$
$f(x) = \cos x$	$f'(x) = -\sin x$	$\mathbb{R}$
$f(x) = \sin x$	$f'(x) = \cos x$	$\mathbb{R}$
$f(x) = \tan x$	$f'(x) = 1 + tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$	$\mathbb{R} - \{k\frac{\pi}{2}; k \in \mathbb{Z}\}$
$f(x) = \cos(\omega t + \phi)$	$f'(x) = -\omega \sin(\omega t + \phi)$	$\mathbb{R}$
$f(x) = \sin(\omega t + \phi)$	$f'(x) = \omega \cos(\omega t + \phi)$	$\mathbb{R}$
$f(x) = \tan(\omega t + \phi)$	$f'(x) = \omega(1 + tan^2(\omega t + \phi))$	$\mathbb{R} - \{k\frac{\frac{\pi}{2} - \phi}{t}; k \in \mathbb{Z}\}$

Tous les résultats de ce tableau se démontrent essentiellement avec la définition du nombre dérivé.

Preuve

Voici un exemple de démonstration d'une des lignes de ce tableau :
Cas 1 : $f(x) = \sin x$
Le taux d'accroissement de f en x s'écrit :

$$\frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} = \frac{\sin x \cos h + \sin h \cos x - \sin x}{h} = \sin x \frac{\cos h - 1}{h} + \frac{\sin h}{h} \cos x$$

Or :

$$\lim_{h \to 0} \frac{\sin h}{h} = 1 \quad \text{et} \quad \lim_{h \to 0} \frac{\cos h - 1}{h} = 0$$

et donc :

$$\lim_{h \to 0} \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} = \cos x$$

Opération sur les dérivées

lorsque u et v sont des fonctions dérivables sur un intervalle I

Fonction	Dérivée	Conditions
$u+v$	$u'+v'$	
ku (k constante)	ku'	
uv	$u'v+uv'$	
$\frac{1}{v}$	$-\frac{v'}{v^2}$	$v \neq 0$ sur I
$\frac{u}{v}$	$\frac{u'v-uv'}{v^2}$	$v \neq 0$ sur I
$u^n \quad n \in \mathbb{Z}$	$nu'u^{n-1}$	$u \neq 0$ sur I si $n \leq 0$
$\sqrt{u}$	$\frac{u'}{2\sqrt{u}}$	$u > 0$ sur I
$v \circ u$	$v'(u) \times u'$	

Tous les résultats de ce tableau se démontrent essentiellement avec la définition du nombre dérivé.

Preuve

Voici un exemple de démonstration d'une des lignes de ce tableau : Montrons que

$$\left(\frac{1}{v}\right)' = -\frac{v'}{v^2}$$

Pour tout $x \in I$ notons $f(x) = \dfrac{1}{v(x)}$ et etudions le taux d'accroissement entre x et $x+h$:

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{\frac{1}{v(x+h)} - \frac{1}{v(x)}}{h} = \frac{v(x)-v(x+h)}{hv(x)v(x+h)} = -\frac{v(x+h)-v(x)}{h} \times \frac{1}{v(x)v(x+h)}$$

Or comme v est dérivable, on a :

$$v'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{v(x+h)-v(x)}{h}$$

Par conséquent :

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} -\frac{v(x+h)-v(x)}{h} \times \frac{1}{v(x)v(x+h)} = -v'(x) \times \frac{1}{v^2(x)}$$

Donc f est dérivable et $f' = -\dfrac{v'}{v^2}$.

Exercice 3 :

Etudier la dérivabilité des fonctions suivantes :

1. $g(x) = \sqrt{x^2+2}$
2. $f(x) = \cos^3 x$
3. $h(x) = x - 1 + \dfrac{1}{x-2}$
4. $k(x) = \dfrac{2}{5}\sqrt{25-x^2}$

On a $g'(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+2}}$, pour tout $x \in \mathbb{R}$

On a $f'(x) = -3\sin x \cos^2 x$, $\forall x \in \mathbb{R}$

On a $h'(x) = 1 - \dfrac{1}{(x-2)^2}$, $\forall x \neq 2$

On a $k'(x) = -\dfrac{2x}{5\sqrt{25-x^2}}$, $\forall x \in]-5;5[$

III) TP : Exercices guidés

III-1 Etude de la fonction tangente.

Exercice 4 :

On souhaite étudier et représenter graphiquement la fonction tangente :

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

1. (a) Résoudre l'équation $\cos x = 0$.
   (b) Déterminer l'ensemble de définition de la fonction tangente.
   (c) Etudier la parité de la fonction tangente.
   (d) Montrer que la fonction tangente est périodique de période π.
   Remarque : Par conséquent, on va se contenter d'étudier la fonction tangente sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right[$, puis à l'aide de la parité on complétera le tracé par la symétrie de centre O, et à l'aide de la périodicité par une série de translation « horizontale ».

2. Etudier les limites de la fonction tangente en 0^+ et en $\frac{\pi}{2}^-$.
   En déduire que la courbe $\mathscr{C}$ de la fonction tangente admet une asymptote dont on précisera la nature et l'équation.
3. Etudier les variations de la fonction tangente sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right[$. On montrera que :
   $$\tan' x = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$$
4. (a) Déterminer une équation de la tangente T à la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 0.
   (b) Démontrer que pour tout $x \in I$, on a :
   $$\tan x \geq x$$
   [a]
   (c) En déduire, la position relative de la courbe $\mathscr{C}$ par rapport à sa tangente T.
5. Tracer, très soigneusement les droites Δ, T et la courbe $\mathscr{C}$. (On se placera entre les bornes -2π et 2π

a. On pourra étudier les variations de la fonction g définie sur I par $g(x) = \tan x - x$.

III-2 Problème d'optimisation

Objectif

Il s'agit d'appliquer les résultats sur la dérivation à la recherche d'extremums d'une fonction.

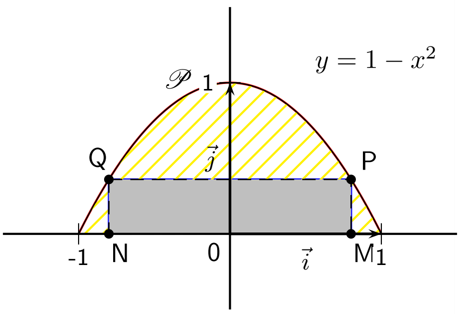
Exercice 5 :

Dans l'arche de parabole $\mathscr{P}$, d'équation $y = 1 - x^2$ (avec $y \geq 0$), on inscrit un rectangle ayant pour axe (Oy), avec M et N sur (Ox), P et Q sur $\mathscr{P}$.
Quelles sont les dimensions du rectangle d'aire maximale ?

1. Le choix de M détermine entièrement le rectangle, notons x son abscisse. Donner les dimensions du rectangle.
2. En déduire que l'aire $\mathscr{A}$ du rectangle $MNOP$ vaut :

$$\mathscr{A}(x) = -2x^3 + 2x$$

3. Déterminer $\mathscr{A}'(x)$ et dresser son tableau de variation.
4. Conclure.



III-3 Etude d'une fonction rationnelle

Exercice 6 :

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{x^3-4}{x^2+1}$ et on note $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé d'unité 1cm.

1. On pose $g(x) = x^3 + 3x + 8$.
   (a) Étudiez le sens de variation de g et montrez que l'équation $g(x) = 0$ admet sur $\mathbb{R}$ une unique solution α dont vous donnerez un encadrement d'amplitude 10^{-2}. [a]
   (b) Précisez le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x.
2. (a) Étudiez les limites de f en $-\infty$ et $+\infty$.
   (b) Calculez $f'(x)$ et dressez le tableau de variation de f.
3. (a) Montrez qu'il existe quatre réels a, b, c, et d tels que

$$f(x) = ax + b + \frac{cx+d}{x^2+1}$$

   (b) Déduisez en que $\mathscr{C}$ admet une asymptote oblique Δ et étudiez la position de $\mathscr{C}$ par rapport à Δ. Vérifiez en particulier que $\mathscr{C}$ rencontre Δ en un unique point Δ.
4. Déterminez les abscisses des point B et B' de $\mathscr{C}$ admettant une tangente parallèle à Δ. [b]
5. (a) Vérifiez que $f(\alpha) = \dfrac{3\alpha}{2}$. Déduisez en une valeur approchée de $f(\alpha)$. [c]
   (b) Tracez Δ, $\mathscr{C}$ ainsi que les points A, B, B' et M, N, P d'abscisses respectives 1, 2 et -1, sans oublier les six tangentes en ces points.

---

a. emploi classique du théorème de la bijection.
b. deux droites parallèles ont le même coefficient directeur...
c. utilisez le fait que $g(\alpha) = 0$.

III-4 ROC : dérivée d'une composée

Exercice 7 :

1. **Restitution organisée de connaissances**
   La formule donnant la dérivée du produit de deux fonctions dérivables est supposée connue. On a énoncé ci-dessous deux propositions désignées par P et Q. Dire pour chacune d'elles si vraie ou fausse et justifier.
   Dans cet exercice n désigne un entier naturel strictement supérieur à 1.
   – P : Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^n$; alors f est dérivable sur $\mathbb{R}$, de dérivée f' donnée sur $\mathbb{R}$ par : $f'(x) = nx^{n-1}$.
   – Q : Soit u une fonction dérivable, de dérivé u' sur $\mathbb{R}$ et soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f = u^n$; alors f est dérivable sur $\mathbb{R}$, de dérivée f' donnée par $f' = nu^{n-1}u'$.
2. On désigne par g la fonction définie sur $]-1\ ;\ 1[$ par $g(0) = 0$ et $g'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ où g' désigne la dérivée de la fonction g sur $]-1\ ;\ 1[$; on ne cherchera pas à expliciter $g(x)$.
   On considère alors la fonction composée h définie sur $]-\pi\ ;\ 0[$ par
   $h(x) = g(\cos x)$.
   (a) Démontrer que pour tout x de $]-\pi\ ;\ 0[$ on a $h'(x) = 1$, où h' désigne la dérivée de h.
   (b) Calculer $h\left(-\dfrac{\pi}{2}\right)$ puis donner l'expression de $h(x)$.

III-5 Extrait de bac étranger

Exercice 8 : BAC Irlandais

1. If $y = x - 1 + \dfrac{1}{x-1}$, $x \neq 1$, find the value of $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ at the point $(4; 2)$.
2. The slope of the curve $y = a\sqrt{x} - 5$ at the point $(4; b)$ is 2. Find the values of a and b.
3. If $y = \sqrt{x}$, show that $x^2\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} + x\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} - \dfrac{1}{4}y = 0$.

Exercice 9 : BAC Anglais

1. Find the coordinates of the turning points on the curve whose equation is $y = x^3 - 9x^2 + 24x$
2. The function f is given by :
$$f(x) = x + \frac{1}{4x}, \quad x \neq 0$$
Find the range of values of x for which f is an increasing function of x.
3. Differentiate with respect to x $4\sin^3(2x)$.
4. The curve $\mathscr{C}$ has equation $y = \dfrac{2x}{1+x^2}$. Find the coordinates of the stationary points and distinguish between them.

Exercice 10 : BAC Suisse

On considère la fonction f définie par
$$f(x) = \frac{2x^4}{x^3 - 1}.$$

1. Étudier la fonction f. Durant l'étude, vous montrerez que la dérivée seconde est la suivante :
$$f''(x) = \frac{12x^2\left(x^3 + 2\right)}{\left(x^3 - 1\right)^3}$$
2. Déterminer la pente de la tangente au point d'inflexion (le point d'abscisse x tel que $f''(x) = 0$).
3. Représenter graphiquement la fonction f (unité : 2 carrés ou 1 cm sur feuille millimétrée).

Exercice 11 : BAC Espagnol

Sea f la función definida para $x \neq -2$ por
$$\frac{x^2}{x+2}$$

1. Halla las asintotas de la gráfica de f.
2. Determina los intervalos de crecimiento y decrecimiento, y los extremos locales de f.
3. Teniendo en cuenta los resultados de los apartados anteriores, haz un esbozo de la gráfica de f.

III-6 Equation Fonctionnelle

Exercice 12 :

Une équation fonctionnelle est une équation dont l'inconnue est une fonction. Nous en étudierons bientôt deux exemplaires en cours :

$$f(x+y) = f(x) \times f(y) \qquad \text{et} \qquad f(xy) = f(x) + f(y)$$

Pour l'heure, nous allons nous contenter de rechercher les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ vérifiant pour tous réels x et y :

$$f(x+y) = f(x) + f(y)$$

Les deux parties sont indépendantes.

PARTIE A

1. Montrez que pour tout entier naturel n, $f(n) = n \times f(1)$
2. Montrez que pour tout entier naturel non nul p, $f(1) = p \times f(1/p)$.
3. Montrez que pour tout entier naturel non nul p, $f(1) = p \times f(1/p)$.
4. Déduisez-en que pour tout rationnel r, $f(r) = r \times f(1)$

PARTIE B

On suppose que f est dérivable en 0 et que $f'(0) = a$. Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = f(x)/x$ pour $x \neq 0$ et $g(0) = a$.

1. Calculez $f(0)$.
2. Montrez que g est continue en 0.
3. Montrez que $g(2x) = g(x)$ pour tout réel x.
4. Déduisez-en que $g(x) = g(x/2^n)$ pour tout réel x et tout entier naturel n.
5. Déduisez-en que g est une fonction constante. [a]
6. Déduisez-en une expression de $f(x)$ pour tout réel x en fonction de a.
7. Réciproquement, vérifiez que les fonctions trouvées à la question 5) sont solutions du problème. Concluez. Comparez avec les résultats de la partie A.

---

a. Où on utilise un théorème du cours sur la continuité

III-7 Divers

Exercice 13 :

On munit le plan d'un repère orthonormé.

1. Soit f la fonction définie sur $[0,1]$ par
$$f(x) = x - 2\sqrt{x} + 1$$
et $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans le repère orthonormé.
2. (a) Étudiez les variations de f.
   (b) Factorisez $f(x)$.
   (c) Démontrez que pour tout $x \in [0,1]$
   $$(f \circ f)(x) = x$$
   (d) Construisez la courbe $\mathscr{C}$.
3. On considère les points A_k de coordonnées (k+1/2, 0) et B_k de coordonnées (0, $1/2 - k$) où k est un paramètre réel de l'intervalle $[-1/2, 1/2]$.
4. On note D_k la droite déterminée par les points A_k et B_k.
   (a) Déterminez une équation de D_k sous la forme $a(k)x + b(k)y + c(k) = 0$ où a, b et c sont trois fonctions dérivables de la variable k que l'on déterminera.
   (b) Soit D'_k la droite d'équation $a'(k)x + b'(k)y + c'(k) = 0$ où a', b' et c' désignent les fonctions dérivées respectives de a, b et c.
   (c) Vérifiez que, pour toute valeur de k dans $[-1/2, 1/2]$, les droites D_k et D'_k sont sécantes en un point M_k.
   (d) Démontrez que les coordonnées de M_k sont
   $$x_k = (1/2 + k)^2 \qquad y_k = (1/2 - k)^2$$
   (e) Démontrez que, lorsque k décrit l'intervalle $[-1/2, 1/2]$, le point M_k décrit la courbe $\mathscr{C}$.

Exercice 14 : Avec une valeur absolue

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par
$$f(x) = \sqrt{|x^2 + 4x - 5|}$$
Soit $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de f dans un repère orthogonal $(O; \vec{u}, \vec{v}$.

1. Écrivez $f(x)$ sans utiliser de valeur absolue.
2. Montrez que $\mathscr{C}_f$ admet la droite d'équation $x = -2$ comme axe de symétrie. Que peut-on en déduire sur le domaine d'étude de f.
3. Étudiez les variations de f là où elle est dérivable.
4. Étudiez la dérivabilité de f en 1. Interprétez graphiquement.
5. Calculez $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x}$ puis $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) - x$. Interprétez graphiquement.
6. Tracez $\mathscr{C}_f$. Vous prendrez 1cm comme unité en abscisse et 2cm en ordonnées. Vous prendrez soin de tracer les tangentes remarquables.

III-8 Complément : théorème de Rolle et des accroissements finis

Théorème 5 : *Théorème de Rolle*

Si f est continue sur $[a,b]$, dérivable sur $]a,b[$ et si $f(a)=f(b)$ alors il existe un réel $c\in]a,b[$ tel que $f'(c)=0$

Nous nous proposons de démontrer ce théorème.

1. Faites un dessin résumant .... et démontrant la situation.
2. Comme f est continue sur $[a,b]$, l'image de $[a,b]$ est un intervalle d'après le TVI. Notons-le $[m,M]$.
   (a) Si $m=M$, que peut-on en déduire ?
   (b) Sinon, le maximum M par exemple est atteint pour un réel $e\in]a,b[$. Notons $\tau_e(x)=\dfrac{f(e+x)-f(e)}{x}$. Que pensez-vous de $\lim\limits_{x\to 0^-}\tau_e(x)$ et $\lim\limits_{x\to 0^+}\tau_e(x)$?
   (c) Étudiez le signe de $f'(e)$ et concluez.

Théorème 6 : *théorème des accroissements finis*

Si f est continue sur $[a,b]$, dérivable sur $]a,b[$ alors il existe au moins un réel $c\in]a,b[$ tel que

$$f(b)-f(a)=(b-a)f'(c)$$

Pour prouver ce théorème, faites une figure. On appellera A le point d'abscisse a, B le point d'abscisse b, M le point de $\mathscr{C}_f$ d'abscisse x et P le point du segment $[AB]$ d'abscisse x. On note enfin $\varphi(x)=\overline{PM}=y_M-y_P$

1. Exprimez $\varphi(x)$ en fonction de x.
2. Pourquoi peut-on appliquer le théorème de Rolle à φ sur $[a,b]$? Appliquez le et concluez.

Exercice 15 : Application du TAF

1. Soit f une fonction dérivable sur $[a,b]$ telle que $f'(x)=0$ pour tout $x\in[a,b]$. Démontrez que f est constante sur $[a,b]$.
2. Soit deux fonctions dérivables sur $[a,b]$ tells que $f'(x)=g'(x)$ pour tout $x\in[a,b]$. Démontrez qu'il existe un réel constant C tel que $f(x)=g(x)+C$ pour tout $x\in[a,b]$.