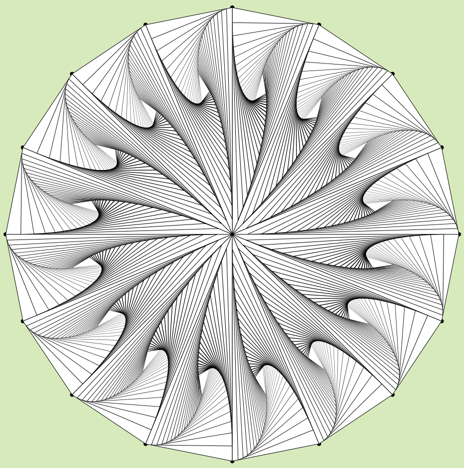
Chapitre 1

Les nombres Complexes 1/2



Hors Sujet

Titre : « La madone »
Auteur : Edvard Munch
Présentation succinte de l'auteur : Edvard Munch (prononcer « Mounk ») (12 décembre 1863 - 23 janvier 1944) est un peintre expressionniste norvégien.

Edvard Munch peut être considéré comme le pionnier de l'expressionnisme dans la peinture moderne. Il est très tôt réputé pour son appartenance à une nouvelle époque artistique en Allemagne et en Europe centrale, et son œuvre et son importance sont aujourd'hui reconnues en Europe et dans le monde. Les œuvres de Munch les plus connues sont celles des années 1890, notamment Le Cri. Sa production ultérieure attire toutefois de plus en plus d'attention et semble inspirer tout spécialement les artistes actuels.

Le Cri (Skrik, 1893) est probablement son œuvre la plus connue. Comme dans le cas de beaucoup de ses œuvres, il en a peint plusieurs versions. Le Cri est une pièce de la série La Frise de la Vie, que Munch a assemblée au tournant du siècle ; il traite d'une manière récurrente des thèmes de la vie, de l'amour, de la peur et de la mort. La collection la plus importante de ses œuvres se trouve au Munchmuseet (le Musée Munch) à Tøyen dans Oslo. Quelques-unes de ses peintures se trouvent à la Nasjonalgalleriet, la galerie nationale d'Oslo. Le bar Dagligstuen de l'Hotel Continental d'Oslo possède de nombreuses impressions. Le Cri et La Madone ont été volés le 22 août 2004 au musée Munch d'Oslo. Ils ont été récupérés dans des circonstances non connues en août 2006 en Norvège. Les deux œuvres ensemble sont estimées à 100 millions de dollars.

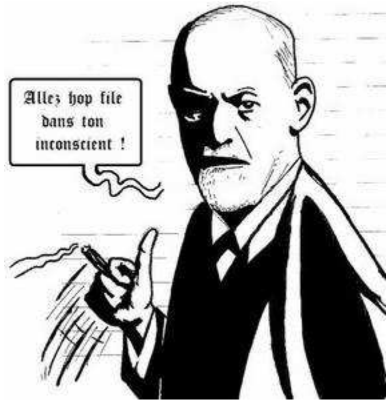
Document réalisé à l'aide de LaTeX
Auteur : D. Zancanaro
Site : wicky-math.fr.nf
Lycée : Jean Durand (Castelnaudary)

Table des matières

« *Télécharger c'est tuer l'industrie, tuons les tous* »
Thurston Moore (Sonic Youth)

Leçon 1

Les nombres Complexes 1/2



Résumé

Les nombres complexes portent bien leur nom ! Ils interviennent partout : en algèbre, en analyse, en géométrie, en électronique, en traitement du signal, en musique, etc. Et en plus, ils n'ont jamais la même apparence : tantôt sous forme algébrique, tantôt sous forme trigonométrique, tantôt sous forme exponentielle, ... Leur succès vient en fait de deux propriétés : en travaillant sur les nombres complexes, tout polynôme admet un nombre de racines égal à son degré et surtout ils permettent de calculer facilement en dimension 2. Ce n'est pas clair ? Alors détaillons !

I) Introduction

I-1 Approche historique

Au début du XVI$^{\text{ème}}$ siècle, le mathématicien Scipione dal Ferro, propose une formule donnant une solution aux équations du 3$^{\text{ème}}$ degré de la forme $x^3 + px = q$:

$$x = \sqrt[3]{\frac{q - \sqrt{q^2 + 4p^3/27}}{2}} + \sqrt[3]{\frac{q + \sqrt{q^2 + 4p^3/27}}{2}}$$

A la fin de ce siècle, Bombelli applique cette formule à l'équation $x^3 - 15x = 4$
Il obtient littéralement :

$$x = \sqrt[3]{2 - 11\sqrt{-1}} + \sqrt[3]{2 + 11\sqrt{-1}}$$

Cette écriture pose un problème majeur puisqu'elle amène à considérer le nombre $\sqrt{-1}$ qui n'a encore aucun sens. Néanmoins, Bombelli va plus plus loin, il remarque en utilisant les règles de calcul usuelles que :

$$\left(2 + \sqrt{-1}\right)^3 = 2 + 11\sqrt{-1} \qquad \text{et} \qquad \left(2 - \sqrt{-1}\right)^3 = 2 - 11\sqrt{-1}$$

Par conséquent, il obtient : $x = 2 + \sqrt{-1} + 2 - \sqrt{-1} = 4.$
Or, $x = 4$ est bien une solution de l'équation $x^3 - 15x = 4$. Une question naturelle s'est alors posée : peut-on légitimement calculer avec des symboles imaginaires comme ci-dessus ? C'est ainsi qu'est née la théorie des nombres complexes . . .

I-2 Approche ensembliste

L'équation $x + 1 = 0$ n'a pas de solution dans $\mathbb{N}$, mais elle admet une solution -1 dans un ensemble plus grand $\mathbb{Z}$.
De même, l'équation $3x = 1$ n'admet pas de solution dans $\mathbb{Z}$, mais elle admet $\frac{1}{3}$ comme solution dans l'ensemble $\mathbb{Q}$ plus vaste que $\mathbb{Z}$
Et puis, l'équation $x^2 = 2$ n'a pas de solution dans $\mathbb{Q}$; il faut chercher dans $\mathbb{R}$ pour en trouver.
En clair, quand une équation n'a pas de solutions, une démarche naturelle (et historique) pour en trouver consiste à

en chercher dans un ensemble plus grand. Au stade de nos connaissances, l'ensemble numérique le plus grand est $\mathbb{R}$. Pourtant l'équation $x^2+1=0$ n'a pas de solutions dans $\mathbb{R}$ ...
On va donc, dans ce chapitre « construire ? »enfin plutôt imaginer un ensemble plus grand que $\mathbb{R}$ dans lequel l'équation $x^2+1=0$ possède des solutions. On l'appellera $\mathbb{C}$: ensemble des nombres complexes. Le principal élément de $\mathbb{C}$ sera noté i (i comme imaginaire) et vérifiera $i^2=-1$. L'équation précédente possédera alors deux solutions :

$$x^2+1=0 \iff (x+i)(x-i)=0 \iff x=i \text{ ou } x=-i$$

Je vous rassure tout de même, il n'existe pas d'ensemble plus grand que $\mathbb{C}$ permettant de résoudre des équations polynômiales.

I-3 Elément d'histoire

En 1637, Descartes propose l'appellation de « nombres imaginaires », mais c'est Gauss en 1831 qui le premier les nomme les « nombres complexes ».
Euler, déclarant que la notation $\sqrt{-1}$ est absurde car elle conduit à une contradiction de la définition, introduit la notation i (comme imaginaire) en 1777 pour le nombre qui vérifie $i^2=-1$.
L'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$ apparaît alors : ce sont les nombres de la forme $a+ib$, avec a et b réels. Les règles de calculs dans $\mathbb{R}$ sont conservées.
Les nombres imaginaires prennent alors leur statut officiel de nombres, avec notamment une représentation géométrique de chaque nombre $x+iy$ avec x et y réels par le point du plan de coordonnées $(x;y)$.
Ils ont notamment servi pour formaliser la théorie de la relativité d'Einstein (1905). A notre niveau, ils sont utiles en géométrie et pour la résolution toutes les équations.

II) Construction du corps des nombres complexes

II-1 Approche dimensionnelle

Vous savez « compter en dimension 1 », c'est-à-dire additionner et multiplier des nombres réels. Faute d'outils plus rigoureux[1] on vous a présenté l'ensemble des nombres réels comme étant les abscisses des points d'une droite graduée.
Vous utilisez depuis l'école primaire ces nombres et les opérations usuelles qui leur sont associées, addition et multiplication sans trop vous poser de questions. Ces opérations vérifient les propriétés suivantes[2] :

- L'addition possède un élément neutre noté 0 : $x+0=0+x=x$
- La somme de deux réels est encore un réel.
- Chaque réel x admet un opposé $-x$ vérifiant $x+(-x)=(-x)+x=0$
- La multiplication possède un élément neutre noté 1 : $x\times 1=1\times x=x$
- Le produit de deux réels est encore un réel.
- Chaque réel différent de 0 admet un inverse x^{-1} vérifiant $x\times x^{-1}=x^{-1}\times x=1$
- La multiplication et l'addition sont associatives et commutatives
- La multiplication est distributive sur l'addition $x(y+z)=x\times y+x\times z$

Tout ceci est bien naturel. Maintenant, on voudrait faire le même travail en dimension 2 i.e pouvoir calculer avec des couples de nombres du style $(x;y)$. On note l'ensemble de ces couples $\mathbb{R}^2$, et on souhaite définir des opérations de manière à faire de $\mathbb{R}^2$ un corps. On définit alors l'addition comme suit :

$$(x;y)+(x';y')=(x+x';y+y')$$

L'élément neutre est alors $(0;0)$, la somme de deux éléments de $\mathbb{R}^2$ est encore un élément de $\mathbb{R}^2$ et l'opposé du nombre $(x;y)$ est $(-x;-y)$. Définissons maintenant la multiplication ! On a envie de la définir de la manière suivante :

$$(x,y)\times(x';y')=(xx';yy') \qquad \text{avec } (1;1) \text{ comme élément neutre}$$

<u>Problème :</u> L'inverse de $(x;y)$ est $\left(\dfrac{1}{x};\dfrac{1}{y}\right)$ ce qui veut dire les couples du type $(x;0)$ avec $x\neq 0$ n'admettent pas d'inverse, or on voudrait que tous les couples différent de $(0;0)$ admettent un inverse. Il faut changer de définition...

1. Vous les verrez peut-être un jour... En général on définit un nombre réel comme étant la limite d'une suite d'approximations par des rationnels.
2. Lorsque un ensemble possède ces propriétés, on dit que c'est un corps. Certains de vos parents ont étudié la notion de corps en classe de $4^{\text{ème}}$, cette étude se fait désormais après le lycée... $\mathbb{Q}$ est aussi un corps mais ce n'est pas le cas de $\mathbb{Z}$ ni de $\mathbb{N}$ (pas d'inverse pour la multiplication)

On décide d'adopter la définition suivante, moins naturelle, dans le but d'avoir un élément de la forme $(1;0)$:

$$(x;y)\times(x';y')=(xx'-yy';xy'+x'y)$$

On a bien $(x;y)\times(1;0)=(x;y)$. De plus l'inverse de $(x;y)\neq(0,0)$ est $\left(\dfrac{x}{x^2+y^2};-\dfrac{y}{x^2+y^2}\right)$ (vous pouvez vérifier !)
Il est temps d'établir le lien entre $\sqrt{-1}$ et $\mathbb{R}^2$ tel qu'on l'a construit. On remarque que :

$$(0;1)^2=(0;1)\times(0;1)=(0-1;0+0)=(-1;0)$$

$(0,1)$ est alors le nombre que l'on a noté i, et $(-1;0)$ c'est -1, et on a alors $i^2=-1$.
Pour mieux comprendre, imaginons l'ensemble des réels comme une droite graduée (ici représenté par l'axe des absisses), ajoutons-y un axe des ordonnées pour passer en dimension 2, alors le réel -1 est associé au point de coordonnées $(-1;0)$, et le nombre dont la racine carré est -1 est lui associé au point de coordonnée $(1;0)$. Nous notons $i=\sqrt{-1}$ pour qu'il fasse moins peur.
Ainsi nous avons les correspondances

Le point M	$\longleftrightarrow$	Le couple (x,y)	$\longleftrightarrow$	Le nombre complexe $x+iy$
$\updownarrow$		$\updownarrow$		$\updownarrow$
Le plan $\mathscr{P}$	$\longleftrightarrow$	$\mathbb{R}^2$	$\longleftrightarrow$	L'ensemble des nombres complexes

Pour se simplifier la vie, nous allons donner un nom à cet ensemble des nombres complexes : $\mathbb{C}$. Et maintenant observez comme les calculs deviennent faciles en prologeant les règles valables sur $\mathbb{R}$!

$$(x+iy)+(x'+iy')=x+iy+x'+iy'=(x+x')+i(y+y')$$

Comme nous avions $(x,y)+(x',y')=(x+x',y+y')$, mais en plus simple.
Et $(x+iy)\cdot(x'+iy')=xx'+ixy'+iyx'+i^2yy'$
N'oubliez pas que $i^2=-1$
Alors $(x+iy)\cdot(x'+iy')=(xx'-yy')+i(xy'+yx')$
Comme nous avions $(x,y)\times(x',y')=(xx'-yy',xy'+yx')$.
Donc nous allons pouvoir calculer en dimension 2 en généralisant les règles de dimension 1. Nous avons juste ajouté ce nombre i de carré -1. En particulier, tous les nombres réels sont des nombres complexes : $\mathbb{R}\subset\mathbb{C}$.

Nous allons pouvoir associer à chacun de ces nombres un point du plan et donc associer des transformations du plan à des calculs dans $\mathbb{C}$: on va résoudre des problèmes de géométrie par le calcul.

II-2 Vocabulaire et premières propriétés

Définition 1 :

On définit un ensemble $\mathbb{C}$:
- muni d'une addition et d'une multiplication qui prolongent celles de $\mathbb{R}$
- contenant un nombre i vérifiant $i^2=-1$
- tel que chaque élément z de $\mathbb{C}$ peut s'écrire de manière unique sous la forme :

$$z=x+iy \text{ avec } x \text{ et } y \text{ des nombres réels}$$

Remarque :
- Nous avons prouvé l'existence d'un tel ensemble dans le paragraphe précédent.
- Cette écriture unique est appelée forme algébrique du nombre complexe z

Définition 2 :

Soit $z\in\mathbb{C}$, alors il existe deux nombres réels x et y tels que $z=x+iy$.
x est la partie réelle de z et se note $\mathfrak{Re}(z)$
y est la partie imaginaire de z et se note $\mathfrak{Im}(z)$

Exemple :

Si $z = 3 + 4i$ alors 3 est la partie réelle et 4 est la partie imaginaire.

Attention !

La partie imaginaire est un **nombre réel** .

Théorème 1 : *égalité de deux nombres complexes*

Soient x, y, x' et y' quatre nombres réels, alors :

$$x + iy = x' + iy' \iff x = x' \text{ et } y = y'$$

Preuve

- Montrons dans un premier que

$$x + iy = 0 \iff x = 0 \text{ et } y = 0$$

$\Leftarrow$) Si $x = 0$ et $y = 0$ alors $x + iy = 0$

$\Rightarrow$) Supposons que $y \neq 0$, dans ce cas on a : $i = -\dfrac{x}{y}$ et par conséquent $i \in \mathbb{R}$, or il n'existe pas de nombres réels tels que $i^2 = -1$. Notre hypothèse est donc absurde, ce qui signifie que $y = 0$ et donc $x + 0 = 0 \iff x = 0$

- Considérons désormais deux nombres complexes z et z' tels que

$$z = x + iy \qquad z' = x' + iy'$$

et montrons que

$$z = z' \iff x + iy = x' + iy' \iff x = x' \text{ et } y = y'$$

$\Leftarrow$) Si $x = x'$ et $y = y'$ alors de manière évidente $z = z'$

$\Rightarrow$) Si $z = z'$ montrons que $x = x'$ et $y = y'$

Comme $z = z'$, on a $z - z' = 0 \iff x - x' + i(y - y') = 0$, par conséquent d'après la première partie de la démonstration :

$$x - x' = 0 \iff x = x' \qquad \text{et} \qquad y - y' = 0 \iff y = y'$$

Remarque : Le résultat précédent peut s'énoncer de la manière suivante : deux nombres complexes sont égaux si et seulement si leur partie réelle et leur partie imaginaire sont égales.[3]

Exercice 1 :

On considère deux nombres complexes $z = 3 + 2i$ et $z' = 2 - i$.
Déterminer la partie réelle et la partie imaginaire des nombres complexes suivants :

1. $z + z'$
2. $z \times z'$
3. $z - z'$
4. $z + 2z'$
5. $2z - 3z'$
6. z^2

Définition 3 :

Tout nombre complexe de la forme $z = iy$ (où $y \in \mathbb{R}$) s'appelle un imaginaire pur. L'ensemble des imaginaires purs est noté $i\mathbb{R}$

Remarque :

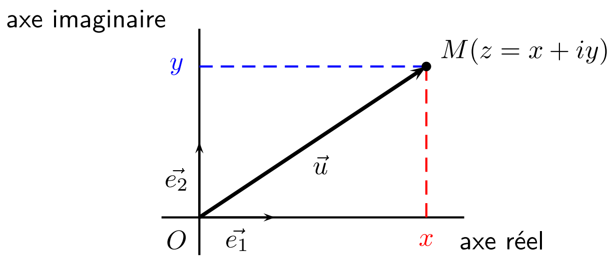
- Dans $\mathbb{C}$, il n'y a pas de notion d'ordre, on ne pourra donc pas comparer deux nombres imaginaires.
- On évitera l'usage abusif du symbole radical $\sqrt{}$ qui reste réservé aux réels positifs.

3. Humour : Pourquoi la vie des hommes est-elle complexe ? Car elle possède une partie réelle et une partie imaginaire...

III) Le plan complexe

III-1 Définition

Nous avons vu que chaque nombre complexe peut être associé à un point du plan qu'on munit d'un repère $(O, \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$ orthonormé.



Définition 4 :

À tout nombre complexe $z = x + iy$ on associe le point M de coordonnées (x, y) qu'on appelle **image** de complexe $z = x + iy$. On le note souvent $M(z)$.
Inversement, à tout point M du plan de coordonnées (x, y), on associe son **affixe** $z = x + iy$ qu'on note souvent z_M.
Enfin, à tout vecteur $\overrightarrow{u} = x\overrightarrow{e_1} + y\overrightarrow{e_2}$ de coordonnées (x, y) dans la base $(O, \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$ est associé une affixe $z_{\overrightarrow{u}} = x + iy$

Exemple :

à $z = 2 - 5i$ correspond le point $M(2; -5)$ et réciproquement. L'affixe du point M est le nombre complexe z

Exercice 2 **:**

Déterminer l'affixe de $\overrightarrow{e_1}$, $\overrightarrow{e_2}$, $-\overrightarrow{e_1}$ et de $-\overrightarrow{e_2}$

III-2 Premiers calculs géométriques

Propriété 1 :

Dans le repère orthonormé $(O, \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$, notons z_A l'affixe du point A et z_B l'affixe du point B, alors l'affixe du vecteur $\overrightarrow{AB}$ est $z_B - z_A$

Preuve

Notons $A(x_A; y_A)$ et $B(x_B; y_B)$ alors $z_A = x_A + iy_A$ et $z_B = x_B + iy_B$.
On a $\overrightarrow{AB}(x_B - x_A; y_B - y_A)$, donc l'affixe du vecteur $\overrightarrow{AB}$ est $(x_B - x_A + i(y_B - y_A)$
D'autre part, $z_B - z_A = x_B + iy_B - (x_A + iy_A) = x_B - x_A + i(y_B - y_A)$
Par conséquent l'affixe du vecteur $\overrightarrow{AB}$ est $\overrightarrow{z_B - z_A}$

Exemple :

L'affixe du vecteur $\overrightarrow{AB}$ avec $A(3; 5)$ et $B(5; 8)$ est donc $z = 2 + 3i$

Remarque : Ces applications permettent de traduire des problèmes de géométrie en relations entre nombres complexes. Par exemple, on utilisera souvent que deux vecteurs sont égaux si et seulement si ils ont mêmes affixes. Ou encore, on utilisera que l'affixe d'une somme de deux vecteurs est la somme des affixes de ces deux vecteurs :

$$aff(\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}) = aff(\vec{u}) + aff(\vec{v})$$

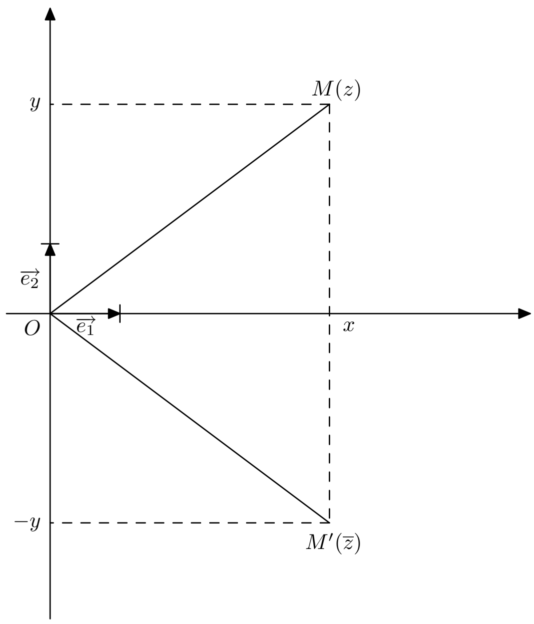
IV) Conjugué d'un nombre complexe.

Définition 5 :
On considère un nombre complexe $z = x + iy$. On appelle conjugué de z, le nombre complexe, noté $\overline{z}$ tel que

$$\overline{z} = x - iy$$

On dit que z et $\overline{z}$ sont des nombres complexes conjugués.

Interprétation géométrique du conjugué :
Les images de deux nombres complexes conjugués sont symétriques par rapport à l'axe des réels :



Exemple :
Le conjugué de $z = 4 - 2i$ est $\overline{z} = 4 + 2i$, le conjugué de i est $-i$, de 7 est 7.

Remarque : On a $\Re\text{e}(z) = \Re\text{e}(\overline{z})$

Corollaire 1 : Critère pour q'un nombre complexe soit réel (resp. imaginaire pur)
On a :

$$z + \overline{z} = 2\Re\text{e}(z) \qquad z - \overline{z} = 2i\Im\text{m}(z)$$

Et les propriétés suivantes :

$$z \text{ est réel} \iff z = \overline{z} \qquad \text{et } z \text{ est imaginaire pur} \iff z = -\overline{z}$$

Preuve

Notons $z = x + iy$ avec x et y deux réels. Ainsi :

$$z + \overline{z} = x + iy + x - iy = 2x = 2\Re\mathrm{e}(z) \text{ et } z - \overline{z} = x + iy - (x - iy) = 2iy = 2i\Im\mathrm{m}(z)$$

On en déduit immédiatement que :

$$z \text{ est réel} \iff \Im\mathrm{m}(z) = 0 \iff z - \overline{z} = 0 \iff z = \overline{z}$$

$$z \text{ est imaginaire pur} \iff \Re\mathrm{e}(z) = 0 \iff z + \overline{z} = 0 \iff z = -\overline{z}$$

Théorème 2 :

Pour tout nombre complexe $z = x + iy$, on a :

$$z\overline{z} = x^2 + y^2 \in \mathbb{R}$$

Preuve

$z\overline{z} = (x + iy)(x - iy) = x^2 - ixy + ixy - i^2y = x^2 + y^2$

Application :

Pour écrire les nombres complexes fractionnaires sous la forme $x + iy$, i.e sous la forme algébrique on multiplie le numérateur et le dénominateur par la quantité conjuguée.

Exemple :

$$\frac{1}{3-4i} = \frac{3+4i}{(3-4i)(3+4i)} = \frac{3+4i}{25} = \frac{3}{25} + \frac{4}{25}i$$

Exercice 3 :

Déterminer la forme algébrique des nombres complexes suivants : $\dfrac{1-i}{1+i}$ et $\dfrac{1}{2+i}$

Propriété 2 :

Pour tous nombres complexes z et z', on a :

1. $\overline{z + z'} = \overline{z} + \overline{z'}$
2. $\overline{-z} = -\overline{z}$
3. $\overline{zz'} = \overline{z}\,\overline{z'}$
4. $\overline{z^n} = \overline{z}^n$
5. $\overline{\left(\dfrac{z}{z'}\right)} = \dfrac{\overline{z}}{\overline{z'}}$ (avec $z' \neq 0$)

Preuve

Soit $z = x + iy$ et $z' = x - iy$ (avec x, y, x' et y' réels), alors :

$$\overline{z + z'} = \overline{x + iy + x' + iy'} = \overline{x + x' + i(y + y')} = x + x' - i(y + y')$$

$$\overline{z} + \overline{z'} = \overline{x + iy} + \overline{x' + iy'} = x - iy + x' - iy' = x + x' - i(y + y')$$

Par conséquent $\overline{z + z'} = \overline{z} + \overline{z'}$.
On démontre de manière similaire les autres égalités.

Exercice 4 :

Déterminer les conjugués des nombres complexes suivants :

1. $z = \dfrac{4-5i}{3+i}$
2. $z = \dfrac{1}{2+i}$

Exercice 5 :

Déterminer le lieu des points M d'affixe z telle que $\dfrac{iz-1}{z-i}$ soit réel.

Application :

Si un polynôme, à coefficients réels, admet un nombre complexe z comme racine alors $\overline{z}$ est aussi une racine de P puisque, d'après les propriétés de la conjugaison (qui commute avec les exposants, les produits et les sommes) :

$$P(\bar{z})) = \overline{P(z)}$$

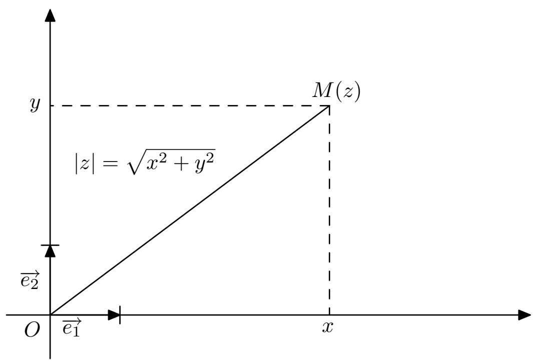
Et donc si $P(z) = 0$ alors $\overline{P(z)} = 0$ d'où $P(\overline{z}) = 0$

Exemple :

On donne $P(x) = x^2 + 1$. Déterminer les racines de P et vérifier qu'elles sont conjuguées.

V) Module et argument d'un nombre complexe

V-1 Module



Définition 6 :

On considère z un nombre complexe, $z = x + iy$ (x et y réels). Le module de z est le nombre réel positif noté $|z|$ et défini par $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Remarque :

- Si z est l'affixe d'un point M, le module de z n'est autre que la distance OM : $OM = |z|$. Par conséquent si z est l'affixe d'un vecteur $\overrightarrow{AB}$ alors $AB = |z_B - z_A|$
- On a $|z| = \sqrt{z\overline{z}}$
- Si $z = x + iy$ est réel ($y = \Im\mathrm{m}(z) = 0$), on a $|z| = \sqrt{x^2} = |x|$. Le module d'un nombre réel est donc sa valeur absolue, ce qui justifie la notation.

Exemple :

Si $z = 3 - 4i$, alors $|z| = 5$. Si $z = 9i$ alors $|z| = 9$.

Exercice 6 :

On donne $z_A = -1 + 4i$ et $z_B = 2 - i$. Notons A l'image de z_A et B l'image de z_B ; calculer la distance AB.

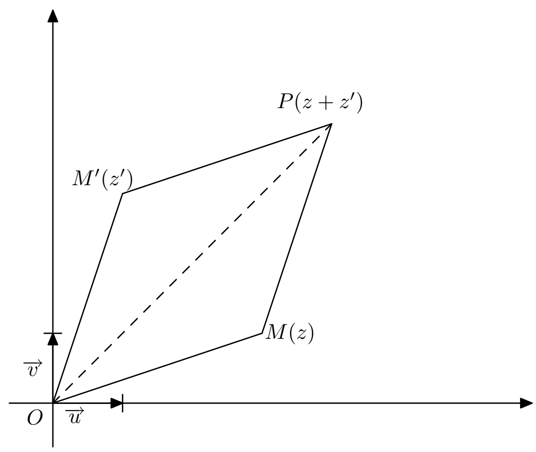
Propriété 3 :

1. $|z| \geq 0$ pour tout nombre complexe z
2. $|z| = 0 \Longleftrightarrow z = 0$
3. Si $z = x + iy$ alors $|z| \geq max(|x|, |y|)$
4. $|zz'| = |z||z'|$
5. $\left|\frac{z}{z'}\right| = \frac{|z|}{|z'|}$
6. $|z + z'| \leq |z| + |z'|$ (inégalité triangulaire)

Preuve

1. $|z| = \sqrt{x^2 + y^2} \geq 0$
2. $|z| = \sqrt{x^2 + y^2} = 0 \Longleftrightarrow x^2 + y^2 = 0 \Longleftrightarrow x = 0$ et $y = 0$
3. $x \leq \sqrt{x^2} \leq \sqrt{x^2 + y^2} = |z|$ et de même $y \leq \sqrt{y^2} \leq \sqrt{x^2 + y^2} = |z|$
4. $$|zz'|^2 = zz'\overline{zz'} = zz'\overline{z}\overline{z'} = z\overline{z}z'\overline{z'} = |z|^2|z'|^2$$
   Comme un module est positif on obtient : $|zz'| = |z||z'|$
5. $$\left|\frac{z}{z'}\right|^2 = \frac{z}{z'}\overline{\frac{z}{z'}} = \frac{z\overline{z}}{z'\overline{z'}} = \frac{|z|^2}{|z'|^2}$$
   Comme un module est positif on obtient : $\left|\frac{z}{z'}\right| = \frac{|z|}{|z'|}$
6. Pour comprendre l'inégalité triangulaire il suffit d'observer cette figure :

On a bien $OP \leq OM + OM'$
et donc $|z + z'| \leq |z| + |z'|$



<u>Démonstration plus rigoureuse</u> : Comme les deux membres de l'inégalité sont positifs, il suffit donc de comparer les carrés de chaque membre. Or

$$|z + z'|^2 = (z + z')(\overline{z + z'}) = (z + z')(\overline{z} + \overline{z'}) = |z|^2 + (z\overline{z'} + \overline{z}z') + |z'|^2$$

D'autre part

$$(|z| + |z'|)^2 = |z|^2 + 2|zz'| + |z'|^2$$

Il s'agit donc de comparer les « doubles produits ».
Or, $z\overline{z'} + \overline{z'}z = z\overline{z'} + \overline{\overline{zz'}} = 2\Re(zz') \leq 2|zz'|$ d'après une propriété ci-dessus. Donc

$$|z + z'|^2 = |z|^2 + (z\overline{z'} + \overline{z}z') + |z'|^2 \leq |z|^2 + 2|zz'| + |z'|^2 = (|z| + |z'|)^2$$

Exercice 7 :

Soient $A(0; 4)$, $B(3; 0)$ et $C(6; 8)$. Quelle est la nature du triangle ABC ?

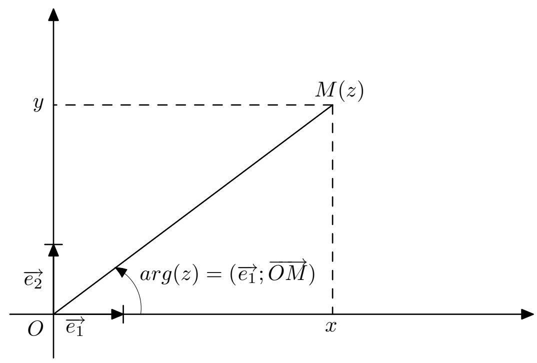
Application :

Soient u et v deux nombres complexes distincts et de même module r, montrer que $\dfrac{u+v}{u-v}$ est un imaginaire pur. On a :

$$\overline{\left(\frac{u+v}{u-v}\right)} = \frac{\overline{u}+\overline{v}}{\overline{u}-\overline{v}} = \frac{uv\overline{u}+uv\overline{v}}{uv\overline{u}-uv\overline{v}} = \frac{|u|^2v+u|v|^2}{|u|^2-u|v|^2} = \frac{r^2v+ur^2}{r^2-ur^2} = -\frac{u+v}{u-v}$$

Ce qui prouve que $\dfrac{u+v}{u-v}$ est un imaginaire pur.

V-2 Argument d'un nombre complexe



Remarque : On note que

$$\boxed{z = r\cos\theta + ir\sin\theta = r(\cos\theta + i\sin\theta)}$$

où $r = |z| = OM$

Définition 7 :

z est un nombre complexe non nul d'image M, $z = x + iy$ (x et y réels). On appelle argument de $z \neq 0$ toute mesure, en radians, de l'angle $(\overrightarrow{e_1}\ ;\ \overrightarrow{OM})$. On note $\theta = arg(z)$

Remarque : Un nombre complexe possède une infinité d'arguments ! En effet si θ est un argument de z, tout autre argument est de la forme $\theta + 2k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$). L'unique argument appartenant à l'intervalle $]-\pi;\pi]$ s'appelle l'argument principal.

On notera par exemple $arg(z) = \dfrac{\pi}{4}[2\pi]$ ou $arg(z) = \dfrac{\pi}{4}$ modulo 2π pour signifier que $arg(z)$ peut-être égal à $\dfrac{\pi}{4}$ mais aussi à n'importe lequel des nombres $\dfrac{\pi}{4} + 2k\pi$ où $k \in \mathbb{Z}$.

Attention !

Le nombre complexe $z = 0$ ne possède pas d'argument car, dans ce cas, l'angle $(\overrightarrow{e_1}\ ;\ \overrightarrow{OM})$ ne se défini pas.

Exercice 8 :

Déterminer un argument des nombres complexes suivants : i, 1, -1, $-i$ et $1+i$.

Remarque :

- Si $z \in \mathbb{R}^+$ alors $arg(z) = 0[2\pi]$, si $z \in \mathbb{R}^-$ dans ce cas $arg(z) = \pi[2\pi]$
- De la même manière un imaginaire pur dont la partie imaginaire est strictement positive a un argument égal à $\dfrac{\pi}{2}[2\pi]$ et un imaginaire pur dont la partie imaginaire est strictement négative a un argument égal à $-\dfrac{\pi}{2}[2\pi]$. Par conséquent :

$$z \in i\mathbb{R} \iff z = 0 \text{ ou } arg(z) = \frac{\pi}{2}[\pi]$$

Théorème 3 :
Si $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ avec $r > 0$ alors $r = |z|$ et $\theta = arg(z)[2\pi]$.
Cette écriture s'appelle une forme trigonométrique de z

Preuve
$|z|^2 = r^2(\cos^2\theta + \sin^2\theta = r^2 \iff |z| = r$ puisque $r > 0$.
De plus on observé en début de paragraphe que si θ' est un argument de z alors :

$$r(\cos\theta' + i\sin\theta')$$

Par conséquent $\theta' = \theta[2\pi]$ et donc θ est un argument de z.

Remarque : Le nombre complexe nul n'a pas de forme trigonométrique (puisque pas d'argument)

Exercice 9 :
Déterminer une forme trigonométrique des nombres complexes suivants : i, 1, -1, $-i$ et $1+i$.

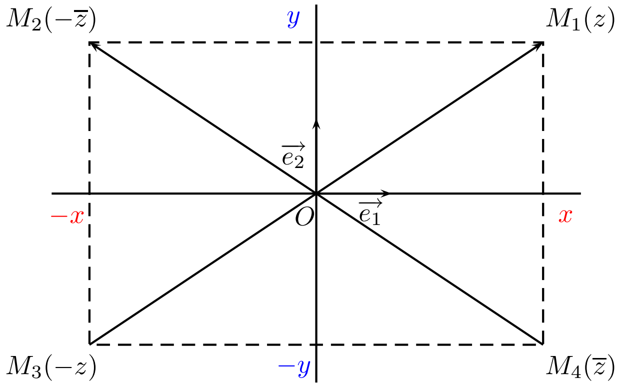
Exercice 10 :
Déterminer une forme trigonométrique de $z = -2\left[\cos\left(\frac{\pi}{5}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{5}\right)\right]$

Remarque : L'argument d'un nombre complexe n'étant pas unique, il en va de même de la forme trigonométrique, contrairement à la forme algébrique.

Propriété 4 :
1. $arg(\overline{z}) = -arg(z)[2\pi]$
2. $arg(-z) = arg(z) + \pi[2\pi]$
3. $arg(-\overline{z}) = \pi - arg(z)[2\pi]$
4. $arg(zz') = arg(z) + arg(z')[2\pi]$
5. $arg\left(\frac{z}{z'}\right) = arg(z) - arg(z')[2\pi]$
6. $\forall n \in \mathbb{Z}$, $arg(z^n) = n \times arg(z)[2\pi]$

Preuve

Les trois premières propriétés se déduisent immédiatement de la figure suivante :



4 Soit $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ et $z' = r'(\cos\theta' + i\sin\theta')$, alors

$$zz' = rr'[(\cos\theta\cos\theta' - \sin\theta\sin\theta') + i(\sin\theta\cos\theta' + \cos\theta\sin\theta')]$$

Vous qui connaissez parfaitement vos formules d'addition (vu en première), vous en déduisez que

$$zz' = z = rr'(\cos(\theta+\theta') + i\sin(\theta+\theta'))$$

Ainsi, nous arrivons au résultat capital : $\arg(zz') = \arg(z) + \arg(z')[2\pi]$

5 $arg\left(\frac{z}{z'}\right) = arg\left(z \times \frac{1}{z'}\right) = arg(z) - arg(z')[2\pi]$

En effet $0 = arg(1) = arg(\frac{1}{z} \times z) = arg(\frac{1}{z} + arg(z)$

6 $\forall n \in \mathbb{N}$, $arg(z^n) = arg(z^{n-1}) + arg(z) = arg(z^{n-2}) + 2arg(z) = \cdots = n \times arg(z)[2\pi]$
Si $n < 0$, alors

$$arg(z^n) = arg\left(\frac{1}{z^{-n}}\right) = -narg\left(\frac{1}{z}\right) = narg(z)[2\pi]$$

Si $n = 0$, c'est trivial.

Remarque : Pour multiplier deux nombres complexes non nuls, on multiplie les modules et on additionne les arguments. Pour diviser deux nombres complexes non nuls, on divise les modules et on soustrait les arguments

Exercice 11 :

Déterminer une forme trigonométrique de $z = -2\sqrt{3} + 2i$ puis de $z' = 3 - 4i$, en déduire une forme trigonométrique de zz' et de $\frac{z}{z'}$

Exercice 12 :

Soit $z = 3\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)$ et $z' = 2\left(\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right)$. Calculer zz'

V-3 Forme Exponentielle

Nous allons voir maintenant une troisième façon, fort commode, de noter les nombres complexes.
Soit z un nombre complexe de module r et d'argument θ, alors on a vu que :

$$z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$$

Il s'agit ici de la forme trigonométrique d'un nombre complexe, on choisit d'adopter la notation suivante :

Définition 8 :

Pour tout réel θ on note :

$$\boxed{e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta}$$

Ainsi on obtient :

$$z = re^{i\theta}$$

Cette notation présente de nombreux avantages, en plus d'alléger la notation trigonométrique, si l'on considère deux nombres complexes z et z' de module r et r' et d'argument θ et θ', alors on a vu que le module de zz' est rr' et l'argument de zz' est $\theta + \theta'$. Observons le calcul suivant :

$$zz' = re^{i\theta}r'e^{i\theta'} = rr'e^{i\theta + i\theta'} = rr'e^{i(\theta+\theta')}$$

On retrouve le module et l'argument du nombre complexe zz' en utilisant les règles de calculs sur les puissances.

Remarque :

1. $e^{i\theta}$ désigne le nombre complexe de module 1 et d'argument θ : $|e^{i\theta}| = 1$ et $arg(e^{i\theta}) = \theta[2\pi]$
2. Tout nombre complexe z d'argument θ et de module r s'écrit $z = re^{i\theta}$, Cette écriture est appelée **forme exponentielle**, comme la forme trigonométrique elle n'est pas unique.

Exemple :

$$e^{i0} = \cos 0 + i\sin 0 = 1$$
$$e^{i\frac{\pi}{2}} = \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2} = i$$
$$e^{i2\pi} = \cos 2\pi + i\sin 2\pi = 1$$
$$e^{-i\frac{\pi}{2}} = \cos\frac{-\pi}{2} + i\sin\frac{-\pi}{2} = -i$$

Remarque : Le conjugué de $e^{i\theta}$ est $\overline{e^{i\theta}} = \cos\theta - i\sin\theta = \cos\theta + i\sin(-\theta) = \cos(-\theta) + i\sin(-\theta) = e^{-i\theta}$

Une simple transcription des propriétés vues sur les arguments donne alors :

Propriété 5 :

$\forall\theta$ et θ' de $\mathbb{R}$ on a :

$$e^{i\theta} \times e^{i\theta'} = e^{i(\theta+\theta')} \qquad \frac{e^{i\theta}}{e^{i\theta'}} = e^{i(\theta-\theta')} \qquad \left(e^{i\theta}\right)^n = e^{in\theta} \text{ pour } n \in \mathbb{Z}$$

Exercice 13 :

Soit $z = 3e^{i\frac{3\pi}{4}}$ et $z' = 5e^{i\frac{\pi}{12}}$, donner une forme exponentielle de zz' et de $\dfrac{z}{z'}$

Exercice 14 :

1. On note $z_1 = 1 + i$ et $z_2 = \sqrt{3} - i$. Déterminer les formes exponentielles de z_1 et z_2
2. En déduire la forme exponentielle du nombre complexe $z = \dfrac{z_1^4}{z_2^3}$
3. Calculer $(1+i)^{14}$

Enigme[4] : Trouver l'erreur dans le calcul suivant :

$$\begin{array}{rrl} & e^{i2\pi} & = 1 \\ \iff & \left(e^{i2\pi}\right)^x & = 1^x = 1 \\ \iff & e^{i2\pi x} & = 1 \\ \text{pour } x = \frac{1}{4} \text{ on obtient :} & e^{i\frac{\pi}{2}} & = 1 \\ \text{d'où :} & i & = 1 \end{array}$$

V-4 Formules de Moivre. Formules d'Euler

Théorème 4 :
$\forall \theta \in \mathbb{R}$ et $\forall n \in \mathbb{Z}$ on a :
Formules de Moivre :

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta \qquad (\cos\theta - i\sin\theta)^n = \cos n\theta - i\sin n\theta$$

Formules d'Euler :

$$\cos\theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \qquad \sin\theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$$

Preuve
Utilisons les formes exponentielles :

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \left(e^{i\theta}\right)^n = e^{in\theta} = \cos n\theta + i\sin n\theta$$

ce qui prouve la première formule de Moivre.

$$(\cos\theta - i\sin\theta)^n = (\cos(-\theta) + i\sin(-\theta))^n = \left(e^{-i\theta}\right)^n = e^{-in\theta} = \cos n\theta - i\sin n\theta$$

ce qui prouve la deuxième formule de Moivre.

$$e^{i\theta} + e^{-i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta + \cos(-\theta) + i\sin(-\theta) = \cos\theta + i\sin\theta + \cos\theta - i\sin\theta = 2\cos\theta$$

d'où la première formule d'Euler.

$$e^{i\theta} - e^{-i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta - \cos(-\theta) - i\sin(-\theta) = \cos\theta + i\sin\theta - \cos\theta + i\sin\theta = 2i\sin\theta$$

d'où la deuxième formule d'Euler.

4. Réponse : La relation $\left(e^{i\theta}\right)^n = e^{in\theta}$ n'est valable que si $n \in \mathbb{Z}$

Application :

1. Linéariser [a] $\sin^3\theta$ et $\cos^4\theta$
2. Calculer $\cos 3\theta$ en fonction de $\cos\theta$ et $\sin 3\theta$ en fonction de $\sin\theta$
3. Démontrer que :
$$x^2 - 2x\cos\theta + 1 = \left(x - e^{i\theta}\right)\left(x - e^{-i\theta}\right)$$
4. Calculer, pour tout $t \in \mathbb{R}$:
$$\Re\mathrm{e}\left(\frac{1}{e^{it}-1}\right) \qquad \text{et} \qquad \Re\mathrm{e}\left(\frac{e^{it}}{e^{it}-1}\right)$$
5. Démontrer que pour tout $\theta \neq \frac{\pi}{2}[2\pi]$:
$$e^{2i\theta} = \frac{1+i\tan\theta}{1-i\tan\theta}$$
6. Calculer $S = \sum\limits_{k=0}^{n} e^{ikt}$. En déduire que pour tout $x \in \mathbb{R}$:
$$\sin[(2n+1)x] = \sin x\left(2S = \sum_{k=0}^{n}\cos(2kx) - 1\right)$$
7. On pose $S = \cos p + \cos q$ et $S' = \sin p + \sin q$. Démontrer que
$$S + iS' = 2e^{i\frac{p+q}{2}}\cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$$
En déduire des expressions de S et S' sous forme de produits. Procéder de même avec $T = \cos p - \cos q$ et $T' = \sin p - \sin q$

a. Linéariser signifie : obtenir une expression sans exposant

Solutions :

1. On a :

$$\sin^3\theta = \left(\frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}\right)^3 = \frac{e^{3i\theta}-3e^{i\theta}+3e^{-i\theta}-e^{-3i\theta}}{-8i} = \frac{2i\sin 3\theta - 6i\sin\theta}{-8i} = -\frac{1}{4}\sin 3\theta + \frac{3}{4}\sin\theta$$

$$\cos^4\theta = \left(\frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}\right)^4 = \frac{e^{4i\theta}+4e^{2i\theta}+6+4e^{-2i\theta}+e^{-4i\theta}}{16} = \frac{2\cos 4\theta + 8\cos 2\theta + 6}{16} = \frac{1}{8}\cos 4\theta + \frac{1}{2}\cos 2\theta + \frac{3}{8}$$

2. D'après la formule de Moivre :

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^3 = \cos 3\theta + i\sin 3\theta$$
$$\iff \cos^3\theta + 3i\cos^2\theta\sin\theta - 3\cos\theta\sin^2\theta - i\sin^3\theta = \cos 3\theta + i\sin 3\theta$$

En identifiant partie réelle et imaginaire :

$$\cos 3\theta = \cos^3\theta - 3\cos\theta\sin^2\theta = \cos^3\theta - 3\cos\theta(1-\cos^2\theta) = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta$$

$$\sin 3\theta = 3\cos^2\theta\sin\theta - \sin^3\theta = 3(1-\sin^2\theta)\sin\theta - \sin^3\theta = 3\sin\theta - 4\sin^3\theta$$

3. On développe :

$$\left(x-e^{i\theta}\right)\left(x-e^{-i\theta}\right) = x^2 - \left(e^{i\theta}+e^{-i\theta}\right)x + 1 = x^2 - 2x\cos\theta + 1$$

4. Pour tout $t \in \mathbb{R}$ on a :

$$\frac{1}{e^{it}-1} = \frac{1}{e^{it/2}\left(e^{it/2}-e^{-it/2}\right)} = \frac{1}{2ie^{it/2}\sin\left(\frac{t}{2}\right)} = \frac{-ie^{-it/2}}{2\sin\left(\frac{t}{2}\right)} = \frac{-i\left(\cos\frac{t}{2} - i\sin\frac{t}{2}\right)}{2\sin\left(\frac{t}{2}\right)} = -\frac{cos\left(\frac{t}{2}\right)+\sin\left(\frac{t}{2}\right)}{2\sin\left(\frac{t}{2}\right)}$$

Par conséquent :

$$\Re\mathrm{e}\left(\frac{1}{e^{it}-1}\right) = -\frac{1}{2}$$

Comme :

$$\frac{e^{it}}{e^{it}-1} = \frac{1}{1-e^{-it}}$$

on a :

$$\Re\mathrm{e}\left(\frac{e^{it}}{e^{it}-1}\right) = \Re\mathrm{e}\left(\frac{1}{1-e^{-it}}\right) = -\Re\mathrm{e}\left(\frac{1}{e^{-it}-1}\right) = \frac{1}{2}$$

5. Pour tout $\theta \neq \frac{\pi}{2}[2\pi]$, on a :

$$\frac{1+i\tan\theta}{1-i\tan\theta} = \frac{1+i\frac{\sin\theta}{\cos\theta}}{1-i\frac{\sin\theta}{\cos\theta}} = \frac{\frac{\cos\theta+i\sin\theta}{\cos\theta}}{\frac{\cos\theta-i\sin\theta}{\cos\theta}} = \frac{\cos\theta+i\sin\theta}{\cos\theta-i\sin\theta} = \frac{e^{i\theta}}{e^{-i\theta}} = e^{2i\theta}$$

Solutions : suite

6 Pour tout $t \in \mathbb{R} - 2\pi\mathbb{Z}$, on a :

$$S = \sum_{k=0}^{n} e^{ikt} = \frac{e^{i(n+1)t-1}}{e^{it}-1} = e^{int}\frac{\sin\left(\dfrac{n+1}{2}t\right)}{\sin\left(\dfrac{t}{2}\right)}$$

L'égalité est évidente dans le cas où $t \in 2\pi\mathbb{Z}$
Posons $x = \dfrac{t}{2}$, ainsi pour $x \in \mathbb{R} - \pi\mathbb{Z}$:

$$\Re\mathrm{e}(\sum_{k=0}^{n} e^{2ikx}) = \cos(nx)\frac{\sin[(n+1)x]}{\sin x} = \frac{1}{2}\frac{\sin[(2n+1)x] - \sin(-x)}{\sin x} = \frac{1}{2}\frac{\sin[(2n+1)x]}{\sin x} + \frac{1}{2}$$

d'où

$$\frac{\sin[(2n+1)x]}{\sin x} = 2\sum_{k=0}^{n}\cos 2kx - 1$$

d'où le résultat.

7 On a :

$$S + iS' = e^{ip} + e^{iq} = e^{i\frac{p+q}{2}}\left(e^{i\frac{p-q}{2}} + e^{-i\frac{p-q}{2}}\right) = 2e^{i\frac{p+q}{2}}\cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$$

d'où :

$$\cos p + \cos q = 2\cos\left(\frac{p+q}{2}\right)\cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$$

$$\sin p + \sin q = 2\sin\left(\frac{p+q}{2}\right)\cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$$

De même $T + iT' = e^{ip} - e^{iq} = e^{i\frac{p+q}{2}}\left(e^{i\frac{p-q}{2}} - e^{-i\frac{p-q}{2}}\right) = 2ie^{i\frac{p+q}{2}}\sin\left(\frac{p-q}{2}\right)$
d'où :

$$\cos p - \cos q = -2\sin\left(\frac{p-q}{2}\right)\sin\left(\frac{p+q}{2}\right)$$

$$\sin p - \sin q = 2\sin\left(\frac{p-q}{2}\right)\cos\left(\frac{p+q}{2}\right)$$

VI) Equations du second degré à coefficients réels

VI-1 Equations du type $x^2 = a$ où $a \in \mathbb{R}$

- Si $a \geq 0$ alors $x = \sqrt{a}$ ou $x = -\sqrt{a}$
- Dans le cas contraire on a $a < 0$, on peut donc considérer le nombre $i\sqrt{-a}$ qui vérifie l'équation $x^2 = a$. De même $-i\sqrt{-a}$ est une solution de cette équation, on a :

$$\begin{aligned} & x^2 = a \\ \iff & x^2 - a = 0 \\ \iff & \left(x - i\sqrt{-a}\right)\left(x + i\sqrt{-a}\right) = 0 \\ \iff & x = i\sqrt{-a} \quad \text{ou} \quad x = -i\sqrt{-a} \end{aligned}$$

Propriété 6 :

L'équation $x^2 = a$ possède deux solutions dans $\mathbb{C}$:
- Si $a \geq 0$ ce sont les réels suivants : $x = \sqrt{a}$ ou $x = -\sqrt{a}$
- Si $a < 0$, ce sont les imaginaires purs conjugués suivants : $x = i\sqrt{-a}$ ou $x = -i\sqrt{-a}$

Exercice 15 **:**

Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

$$x^2 = -3 \qquad z^2 + \frac{3}{4} = 0 \qquad z^2 = \cos^2\theta - 1 \qquad x + \frac{1}{x} = 0$$

VI-2 Equations du type $ax^2 + bx + c = 0$ où a, b et c sont des réels avec $a \neq 0$

Considérons le discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$.

1. Les solutions de l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ $(a \neq 0)$ lorsque $\Delta \geq 0$ sont

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \qquad \text{et} \qquad x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$

2. On suppose que $\Delta < 0$. On remarque que $\Delta = \left(i\sqrt{-\Delta}\right)^2$. On a vu en première que

$$ax^2 + bx + c = 0 \iff \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{\Delta}{4a^2}$$

Par conséquent :

$$\begin{aligned}
& \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{\Delta}{4a^2} \\
\iff & \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{i\sqrt{-\Delta}}{2a}\right) = 0 \\
\iff & \left(x + \frac{b}{2a} - \frac{i\sqrt{-\Delta}}{2a}\right)\left(x + \frac{b}{2a} + \frac{i\sqrt{-\Delta}}{2a}\right) = 0 \\
\iff & x = \frac{-b - i\sqrt{-\Delta}}{2a} \quad \text{ou} \quad x = \frac{-b + i\sqrt{-\Delta}}{2a}
\end{aligned}$$

Théorème 5 :

L'équation $ax^2 + bx + c = 0$ avec $a \neq 0$, b et c réels possède (une ou) deux solutions dans $\mathbb{C}$:
- Si $\Delta \geq 0$, ce sont les réels suivants :

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \qquad \text{et} \qquad x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$

- Si $\Delta < 0$, ce sont les complexes conjugués suivants :

$$z_1 = \frac{-b - i\sqrt{-\Delta}}{2a} \qquad \text{et} \qquad z_2 = \frac{-b + i\sqrt{-\Delta}}{2a}$$

Exercice 16 **:**

Résoudre, dans $\mathbb{C}$, les équations suivantes :

$$2z^2 - 3z + 4 = 0 \qquad x^2 - 2x + 2 = 0 \qquad 2z^4 + z^2 - 10 = 0$$