

Exercice 1. R.O.C

(4 points)

1. Compléter :

f est dérivable en a si et seulement si la limite de $\frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ lorsque x tend vers a existe et est finie.

On note alors dans ce cas là :

$$f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

2. En utilisant la question précédente on a

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^0}{x - 0} = f'(0) = 1$$

avec $f(x) = e^x$ qui est bien dérivable, de plus $f'(x) = e^x$ et donc $f'(0) = e^0 = 1$ **Exercice 2.**

(6 points)

Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par :

$$f(x) = e^x - x - 4$$

et \mathcal{C}_f sa représentation graphique dans le plan muni d'un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$.1. On a pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$f'(x) = e^x - 1$$

De plus

$$e^x - 1 \geq 0 \iff e^x \geq 1 \iff e^x \geq e^0 \iff x \geq 0$$

D'où le tableau de variation suivant :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
Signe de $e^x - 1$	-	0	+
Variation de $e^x - x - 4$			

2. En remarquant que, pour tout réel non nul x :

$$f(x) = x \left(\frac{e^x}{x} - 1 - \frac{4}{x} \right)$$

et sachant que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4}{x} = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$$

on en déduit que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

3. On a

$$f(x) - y = f(x) - (-4 - x) = e^x - x - 4 + 4 + x = e^x$$

ce qui tend vers 0 lorsque x tend vers $-\infty$, ainsi la droite \mathcal{D} d'équation $x + y + 4 = 0$ est asymptote à la courbe \mathcal{C}_f en $-\infty$.

De plus

$$f(x) - y = e^x > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Par conséquent la courbe \mathcal{C}_f est au dessus de D .

Exercice 1. R.O.C

(4 points)

1. Montrer que $e^x > x$, pour cela étudier la fonction f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = e^x - x$.
2. En utilisant l'égalité précédent pour $X = \frac{x}{2}$ démontrer que pour tout $x \in \mathbb{R}^{+*}$ on a

$$\frac{e^x}{x} \geq \frac{x}{4}$$

3. En déduire la limite de $\frac{e^x}{x}$ lorsque x tend vers $+\infty$.

Preuve

1. Montrons pour cela que $\forall x \in \mathbb{R}$ on a :

$$e^x \geq x$$

On considère la fonction f définie sur \mathbb{R} par :

$$f(x) = e^x - x$$

f est une fonction dérivable sur \mathbb{R} et $f'(x) = e^x - 1$

$$f'(x) = 0 \iff e^x = 1 \iff e^x = e^0 \iff x = 0$$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$		$-$	$+$
f			

Par conséquent $f(x) \geq 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ i.e :

$$e^x - x \geq 1 > 0 \implies e^x > x$$

2. On a donc, pour tout $x \in \mathbb{R}^{+*}$:

$$\begin{aligned} e^{\frac{x}{2}} &\geq \frac{x}{2} \\ \iff \left(e^{\frac{x}{2}}\right)^2 &\geq \frac{x^2}{4} \\ \iff e^{\frac{2x}{2}} &\geq \frac{x^2}{4} \\ \iff e^x &\geq \frac{x^2}{4} \\ \iff \frac{e^x}{x} &\geq \frac{x}{4} \end{aligned}$$

3. Par comparaison, comme $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{4} = +\infty$ on en déduit que :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$$

Exercice 2.

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R} - \{-2\}$ par :

$$f(x) = e^{\frac{x-1}{x+2}}$$

et \mathcal{C}_f sa représentation graphique dans le plan muni d'un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1. On a pour tout $\mathbb{R} - \{-2\}$:

$$f'(x) = \left(\frac{(x+2) - (x-1)}{(x+2)^2} \right) e^{\frac{x-1}{x+2}} = \frac{3}{(x+2)^2} e^{\frac{x-1}{x+2}} > 0$$

Par conséquent la fonction f est strictement croissante sur $] -\infty; -2[$ et sur $] -2; +\infty[$

2. On a :

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x-1}{x+2} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x}{x} = 1 \implies \lim_{x \rightarrow \pm\infty} e^{\frac{x-1}{x+2}} = e^1 = e$$

Par conséquent la fonction f admet en $\pm\infty$ une asymptote horizontale d'équation $y = e$.

3. On a :

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x-1}{x+2} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{-3}{x-2} = +\infty \implies \lim_{x \rightarrow 2^-} e^{\frac{x-1}{x+2}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$$

De même

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x-1}{x+2} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{-3}{x-2} = -\infty \implies \lim_{x \rightarrow 2^+} e^{\frac{x-1}{x+2}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$$

Par conséquent la fonction f admet en 2^- une asymptote verticale d'équation $x = 2$. Déterminer les limites de f en 2^+ et en 2^- . En déduire les asymptotes éventuelles.