Correction de l'interrogation n°8

<u>Exercice</u> 1. R.O.C (4 points)

1. Compléter :

f est dérivable en a si et seulement si la limite de $\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ lorsque x tend vers a existe et est finie.
On note alors dans ce cas là :

$$f'(a)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

2. En utilisant la question précédente on a

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-e^0}{x-0}=f'(0)=1$$

avec $f(x)=e^x$ qui est bien dérivable, de plus $f'(x)=e^x$ et donc $f'(0)=e^0=1$

<u>Exercice</u> 2. (6 points)

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x)=e^x-x-4$$

et $\mathscr{C}_f$ sa représentation graphique dans le plan muni d'un repère orthonormal $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1. On a pour tout $x\in\mathbb{R}$:

$$f'(x)=e^x-1$$

De plus

$$e^x-1\geq 0\iff e^x\geq 1\iff e^x\geq e^0\iff x\geq 0$$

D'où le tableau de variation suivant :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
Signe de e^x-1		$-$	0	$+$	
Variation de e^x-x-4		$\searrow$	-3	$\nearrow$	

2. En remarquant que, pour tout réel non nul x :

$$f(x)=x\left(\frac{e^x}{x}-1-\frac{4}{x}\right)$$

et sachant que

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x}=+\infty \qquad \text{et} \qquad \lim_{x\to+\infty}\frac{4}{x}=0 \qquad \text{et} \qquad \lim_{x\to+\infty}x=+\infty$$

on en déduit que

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$$

3. On a

$$f(x)-y=f(x)-(-4-x)=e^x-x-4+4+x=e^x$$

ce qui tend vers 0 lorsque x tend vers $-\infty$, ainsi la droite $\mathscr{D}$ d'équation $x+y+4=0$ est asymptote à la courbe $\mathscr{C}_f$ en $-\infty$.
De plus

$$f(x)-y=e^x>0 \qquad \forall x\in\mathbb{R}$$

Par conséquent la courbe $\mathscr{C}_f$ est au dessus de D.

Correction de l'interrogation n°8

Exercice 1. R.O.C (4 points)

1. Montrer que $e^x > x$, pour cela étudier la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^x - x$.
2. En utilisant l'égalité précédent pour $X = \dfrac{x}{2}$ démontrer que pour tout $x \in \mathbb{R}^{+*}$ on a

$$\frac{e^x}{x} \geq \frac{x}{4}$$

3. En déduire la limite de $\dfrac{e^x}{x}$ lorsque x tend vers $+\infty$.

Preuve

1. Montrons pour cela que $\forall x \in \mathbb{R}$ on a :

$$e^x \geq x$$

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = e^x - x$$

f est une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x) = e^x - 1$
$f'(x) = 0 \Longleftrightarrow e^x = 1 \Longleftrightarrow e^x = e^0 \Longleftrightarrow x = 0$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
f		$\searrow$	1	$\nearrow$	

Par conséquent $f(x) \geq 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ i.e :

$$e^x - x \geq 1 > 0 \Longrightarrow e^x > x$$

2. On a donc, pour tout $x \in \mathbb{R}^{+*}$:

$$\begin{aligned}
& e^{\frac{x}{2}} \geq \frac{x}{2} \\
\Longleftrightarrow \quad & \left(e^{\frac{x}{2}}\right)^2 \geq \frac{x^2}{4} \\
\Longleftrightarrow \quad & e^{\frac{2x}{2}} \geq \frac{x^2}{4} \\
\Longleftrightarrow \quad & e^x \geq \frac{x^2}{4} \\
\Longleftrightarrow \quad & \frac{e^x}{x} \geq \frac{x}{4}
\end{aligned}$$

3. Par comparaison, comme $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{x}{4} = +\infty$ on en déduit que :

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$$

<u>Exercice</u> 2. (6 points)

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R} - \{-2\}$ par :

$$f(x) = e^{\frac{x-1}{x+2}}$$

et $\mathscr{C}_f$ sa représentation graphique dans le plan muni d'un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1. On a pour tout $\mathbb{R} - \{-2\}$:

$$f'(x) = ((x+2) - (x-1))e^{\frac{x-1}{x+2}} = 3e^{\frac{x-1}{x+2}} > 0$$

Par conséquent la fonction f est strictement croissante sur $]-\infty; -2[$ et sur $]-2; +\infty[$

2. On a :

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{x-1}{x+2} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{x}{x} = 1 \Longrightarrow \lim_{x \to \pm\infty} e^{\frac{x-1}{x+2}} = e^1 = e$$

Par conséquent la fonction f admet en $\pm\infty$ une asymptote horizontale d'équation $y = e$.

3. On a :

$$\lim_{x \to 2^-} \frac{x-1}{x+2} = \lim_{x \to 2^-} \frac{-3}{x-2} = +\infty \Longrightarrow \lim_{x \to 2^-} e^{\frac{x-1}{x+2}} = \lim_{x \to +\infty} e^x = +\infty$$

De même

$$\lim_{x \to 2^+} \frac{x-1}{x+2} = \lim_{x \to 2^+} \frac{-3}{x-2} = -\infty \Longrightarrow \lim_{x \to 2^+} e^{\frac{x-1}{x+2}} = \lim_{x \to -\infty} e^x = 0$$

Par conséquent la fonction f admet en 2^- une asymptote verticale d'équation $x = 2$. Déterminer les limites de f en 2^+ et en 2^-. En déduire les asymptotes éventuelles.