Correction de l'interrogation n°7

<u>Exercice</u> 1. ***R.O.C, Polynésie-juin 2005*** (4 points)
Prérequis : Théorème des valeurs intermédiaires « Soit I un intervalle, a et b deux réels de I tels que $a < b$.
Soit f une fonction continue sur I, soit k un réel compris entre $f(a)$ et $f(b)$, alors :
il existe au moins un réel c dans $[a; b]$ tel que $f(c) = k$ ».
Démontrer le théorème suivant :

Théorème 1 : *théorème de la bijection*

Soit f une fonction continue et strictememnt monotone sur un intervalle I. Soit a et b deux réels de I tels que $a < b$.
Soit k un réel compris entre $f(a)$ et $f(b)$ alors :
il existe un unique c dans $[a; b]$ tel que $f(c) = k$

<u>Preuve</u>

- L'existence est assuré par le théorème des valeurs intermédiaires.
- L'unicité découle donc de la stricte monotonie de la fonction f. On sait qu'il un réel c dans $[a; b]$ tel que $f(c) = k$.
  Considérons le cas où f est une fonction strictement croissante sur $[a; b]$, alors pour tout $x < c$ on a $f(x) < f(c)$ et pour tout $x > c$ on a $f(x) > f(c) = k$, autrement dit pour tout $x \neq c$ de l'intervalle $[a; b]$ on a $f(x) \neq f(c)$, par conséquent c est unique.

<u>Exercice</u> 2. (6 points)
On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = x^3 - 30x^2 + 112$$

On souhaite étudier le signe de la fonction f

1. La fonction f est continue sur $\mathbb{R}$ puisque c'est une fonction polynôme.
2. La limite de f en $+\infty$ et en $-\infty$ est la limite de son monôme de plus haut degré :

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} x^3 = +\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} x^3 = -\infty$$

3. On a, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$f'(x) = 3x^2 - 60x = 3x(x - 20)$$

x	$-\infty$		0		20		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
f	$-\infty$	$\nearrow$	112	$\searrow$	-3888	$\nearrow$	$+\infty$

4. Sur l'intervalle $]-\infty; 0]$ la fonction f est strictement croissante (donc monotone) et continue sur $\mathbb{R}$, de plus $f(0) = 112 > 0$ et la limite de f en $-\infty$ vaut $-\infty$, par conséquent d'après le théorème de la bijection f possède une unique racine dans $]-\infty; 0]$.
   Sur l'intervalle $[20; +\infty$ la fonction f est strictement croissante (donc monotone) et continue sur $\mathbb{R}$, de plus $f(20) = -3888 < 0$ et la limite de f en $+\infty$ vaut $+\infty$, par conséquent d'après le théorème de la bijection f possède une unique racine dans $[20; +\infty$.
   Sur l'intervalle $[0; 20]$ la fonction f est strictement décroissante (donc monotone) et continue sur $\mathbb{R}$, de plus $f(20) = -3888 < 0$ et $f(0) = 112 > 0$, par conséquent d'après le théorème de la bijection f possède une unique racine dans $[0; 20]$.
   L'équation $f(x) = 0$ admet donc trois solutions dans $\mathbb{R}$.

5. $\boxed{\mathscr{S} = \left\{2; 14-6\sqrt{7}; 14+6\sqrt{7}\right\}}$

6.

x	$-\infty$		$14-6\sqrt{7}$		2		$14+6\sqrt{7}$		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Correction de l'interrogation n°7

Exercice 1. R.O.C (4 points)
On considère la fonction partie entière E qui a tout x réel associe le plus grand entier inférieur ou égal à x.
Montrer que la fonction partie entière est discontinue pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Preuve
Cette fonction admet des discontinuités en tout entier, en effet on a :

$$\lim_{x \to n^+} E(x) = n \quad \text{et} \quad \lim_{x \to n^-} E(x) = n - 1$$

Les limites à droite et à gauche étant différente, la fonction partie entière n'admet pas de limite en n, elle est donc discontinue en n pour tout entier n.

Exercice 2. (6 points)

1. (a) Démontrer que l'équation $x^3 + 3x = 5$ admet une solution et une seule dans $\mathbb{R}$.
Noton P la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$P(x) = x^3 + 3x - 5$$

.
Pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a :

$$P'(x) = 3x^2 + 3 = 3(x^2 + 1) > 0$$

Par conséquent la fonction P est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, de plus la limite de P en $+\infty$ et en $-\infty$ est la limite de son monôme de plus haut degré :

$$\lim_{x \to +\infty} P(x) = \lim_{x \to +\infty} x^3 = +\infty$$

$$\lim_{x \to -\infty} P(x) = \lim_{x \to -\infty} x^3 = -\infty$$

Comme la fonction P est un polynôme de degré 3, P est continue, donc d'après le théorème de la bijection l'équation $P(x) = 0$ admet une unique solution que nous noterons α dans $\mathbb{R}$.

(b) En utilisant la calculatrice, on peut dresser un tableau de valeurs de $f(x)$ qui nous permet d'affirmer que

$$1,15 < \alpha < 1,16$$

Une valeur approchée de α à 0,01 près est donc 1,15

2. (a) Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 \text{ si } x < 0 \\ x - 1 \text{ si } x \geq 0 \end{cases}$$

f est continue sur $\mathbb{R}^*$ car f est une fonction polynôme. De plus f est continue en 0 car :

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = -1 = f(0)$$

(b) Quelle valeur de a faut-il choisir pour que la fonction définie par :

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{x+1} - 1}{x} \text{ si } x \in [-1; 0[\cup]0; +\infty[\\ a \text{ si } x = 0 \end{cases}$$

La fonction f est continue en 0 si et seulement si :

$$\lim_{x \to 0} f(x) = f(0) = a$$

Il faut donc calculer la limite suivante (qui est une forme indéterminée du type $\dfrac{0}{0}$:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{x+1} - 1}{x}$$

Procédons comme habituellement avec les racines carrées, en multipliant numérateur et dénominateur par la quantité conjuguée :

$$\frac{\sqrt{x+1}-1}{x} \times \frac{\sqrt{x+1}+1}{\sqrt{x+1}+1} = \frac{x+1-1}{x(\sqrt{x+1}+1)} = \frac{1}{\sqrt{x+1}+1}$$

On peut désormais conclure car on vient de lever l'indétermination :

$$\lim_{x \to 0} \sqrt{x+1}+1 = 2 \Longrightarrow \lim_{x \to 0} f(x) = \frac{1}{2}$$

En choisissant $a = \dfrac{1}{2}$ f est alors une fonction continue sur $\mathbb{R}$.