Correction de l'interrogation n°6

Exercice 1. ***R.O.C, Polynésie-juin 2005*** (2 points)
Prérequis : définition d'une suite tendant vers $+\infty$. « Une suite tend vers $+\infty$ si, pour tout réel A, tous les termes de la suite sont, à partir d'un certain rang, supérieurs à A ».
Démontrer le théorème suivant : *une suite croissante non majorée tend vers $+\infty$.*

Preuve

Soit A un réel. Comme u_n est non majorée alors il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que

$$u_{n_0} > A$$

Comme (u_n) est croissante on a :

$$u_n \geq u_{n_0} > A \qquad \forall n \geq n_0$$

Ce raisonnement est valable quelque soit le réel A choisi au départ, par conséquent la suite (u_n) tend vers $+\infty$.

Exercice 2. (6 points)
Soit f la fonction f définie sur l'intervalle $[0; 2]$ par :

$$f(x) = \frac{2x+1}{x+1}$$

1. Pour tout $x \in [0; 2]$ on a :

$$f'(x) = \frac{2(x+1) - 2x - 1}{(x+1)^2} = \frac{1}{(x+1)^2} > 0$$

Par conséquent la fonction f est strictement croissante sur $[0; 2]$.

2. Si $x \in [1; 2]$ alors $1 \leq x \leq 2$, or comme la fonction f est croissante sur $[0; 2]$ on a :

$$f(1) \leq f(x) \leq f(2)$$

Or, $f(1) = \dfrac{3}{2}$ et $f(2) = \dfrac{5}{3}$, par conséquent

$$(1 <)\frac{3}{2} \leq f(x) \leq \frac{5}{3}(< 2)$$

donc on a bien $f(x) \in [1; 2]$

3. Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = f(u_n) = \dfrac{2u_n + 1}{u_n + 1}$

(a) Notons $\mathscr{P}(n) : 1 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 2$

– *Initialisation* : $u_0 = 1$ et $u_1 = \dfrac{3}{2}$, on a :

$$1 \leq 1 \leq \frac{3}{2} \leq 2 \qquad i.e \qquad 1 \leq u_0 \leq u_1 \leq 2$$

la propriété $\mathscr{P}$ est donc vraie au rang 0.

– *Hérédité* : Supposons que la propriété $\mathscr{P}$ soit vraie pour un certain n et montrons qu'elle est vraie au rang $n+1$
D'après l'hypothèse de récurrence on a :

$$1 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 2$$

De plus comme la fonction f est croissante sur $[0; 2]$ on a :

$$f(1) \leq f(u_n) \leq f(u_{n+1}) \leq f(2)$$

ce qui équivaut) dire que

$$(1 <)\frac{3}{2} \leq u_{n+1} \leq u_{n+2} \leq \frac{5}{3}(< 2)$$

Par conséquent la propriété $\mathscr{P}$ est vraie au rang $n+1$ et donc elle est héréditaire.
On peut en conclure que

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad 1 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 2$$

(b) La suite (u_n) est croissante et majorée par 2 donc elle est convergente.

<u>Exercice</u> 3. (2 points)

Démontrer que la représentation graphique $\mathscr{C}_f$ admet une asymptote que l'on précisera :

$$f : x \longmapsto \frac{5x^5 + 3x - 1}{-x^5 + 4x^4 + 2x - 7}$$

On a

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{5x^5}{-x^5} = -5$$

Donc la fonction f admet en $\pm$ une asymptote horizontale d'équation $y = -5$.

Correction de l'interrogation n°6

Exercice 1. R.O.C (2 points)

On considère la fonction partie entière E qui a tout x réel associe le plus grand entier inférieur ou égal à x. Montrer que la fonction partie entière est discontinue pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Preuve

Cette fonction admet des discontinuités en tout entier, en effet on a :

$$\lim_{x \to n^+} E(x) = n \quad \text{et} \quad \lim_{x \to n^-} E(x) = n - 1$$

Les limites à droite et à gauche étant différente, la fonction partie entière n'admet pas de limite en n, elle est donc discontinue en n pour tout entier n.

Exercice 2. (6 points)

On considère les deux suites (u_n) et (v_n) définies, pour tout entier naturel n, par :

$$u_0 = 3 \qquad \text{et} \qquad v_0 = 4 \qquad u_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2} \qquad ; \qquad v_{n+1} = \frac{u_{n+1} + v_n}{2}$$

1. On a $u_1 = \dfrac{3+4}{2} = \dfrac{7}{2}$, $v_1 = \dfrac{3,5+4}{2} = \dfrac{15}{4}$
   Et $u_2 = \dfrac{29}{8}$ et $v_2 = \dfrac{59}{16}$.
2. Soit la suite (w_n) définie pour tout entier naturel n par $w_n = v_n - u_n$.
   (a)

$$\begin{aligned}
w_{n+1} &= v_{n+1} - u_{n+1} \\
&= \frac{u_{n+1} + v_n}{2} - \frac{u_n + v_n}{2} \\
&= \frac{u_{n+1} + v_n - u_n - v_n}{2} \\
&= \frac{\frac{u_n + v_n}{2} - u_n}{2} \\
&= \frac{\frac{u_n + v_n - 2u_n}{2}}{2} \\
&= \frac{v_n - u_n}{4} \\
&= \frac{1}{4}(v_n - u_n) \\
&= \frac{1}{4} w_n
\end{aligned}$$

   Par conséquent (w_n) est une suite géométrique de raison $\dfrac{1}{4}$

   (b) On a :

$$w_n = w_0 \times \left(\frac{1}{4}\right)^n = \frac{1}{4^n}$$

   Comme $0 < \dfrac{1}{4} < 1$, la suite (w_n) converge vers 0.

Exercice 3. (2 points)

Déterminer la limite en $+\infty$ de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{1 + 4\cos x}{1 + x^2}$$

Correction succinte : On a :

$$\frac{-3}{1+x^2} \leq f(x) \leq \frac{5}{1+x^2}$$

En utilisant le théorème des gendarmes on conclut que $f(x)$ tend vers 0 en $+\infty$