Correction de l'interrogation n°5

Exercice 1. R.O.C (4 points)

1. Montrer, par récurrence, que pour tout réel x positif et pour tout entier n, on a :

$$(1+x)^n \geq 1+nx$$

2. Soit (u_n) une suite définie par $u_n = q^n$ (avec $q > 0$).
   (a) En utilisant la première question (on posera $q = x+1$) montrer que u_n a pour limite $+\infty$ lorsque $q > 1$.
   (Hors Barème) Si $q \in]0;1[$, en posant $q' = \dfrac{1}{q} > 1$ démontrer que u_n converge ves 0

Preuve

1. Notons $\mathscr{P}(n)$ la propriété $(1+x)^n \geq 1+nx$ est vraie
   $\mathscr{P}(0)$ et $\mathscr{P}(1)$ sont évidentes
   Montrons que $\mathscr{P}(n) \Longrightarrow \mathscr{P}(n+1)$.
   On suppose donc que $(1+x)^n \geq 1+nx$ et on souhaite montrer que : $(1+x)^{n+1} \geq 1+(n+1)x$
   On a alors, pour tout $x \geq 0$:

$$\begin{array}{rll} & (1+x)^n \geq 1+nx & \\ \Longleftrightarrow & (1+x)^{n+1} \geq (1+nx)(1+x) & \text{en multipliant membre à membre par } (1+x) > 0 \\ \Longleftrightarrow & (1+x)^{n+1} \geq 1+nx+x+nx^2 & \\ \Longleftrightarrow & (1+x)^{n+1} \geq 1+(n+1)x+nx^2 & \\ \Longleftrightarrow & (1+x)^{n+1} \geq 1+(n+1)x & \text{puisque } nx^2 \geq 0 \end{array}$$

   Résumons : On a donc $\mathscr{P}(0)$ mais aussi, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\mathscr{P}(n) \Longrightarrow \mathscr{P}(n+1)$, par conséquent on a : pour tout réel x positif et pour tout entier n,

$$(1+x)^n \geq 1+nx$$

2. (a) $q > 1$
   Posons $x = q-1$, on a alors $x > 0$, et d'après l'inégalité de Bernoulli :

$$q^n = (1+x)^n \geq 1+nx$$

   Or, $\lim\limits_{n\to+\infty} 1+nx = +\infty$, par comparaison on en déduit :

$$\lim_{n\to+\infty} q^n = +\infty$$

   La suite (u_n) diverge donc vers $+\infty$

   (b) Posons $q' = \dfrac{1}{q}$, dans ce cas $q' \in]1;+\infty[$
   D'après le résultat précédent :

$$\lim_{n\to+\infty} q'^n = +\infty$$

   Par passage à l'inverse nous obtenons donc :

$$\lim_{n\to+\infty} q^n = 0$$

   La suite (u_n) converge donc vers 0

Exercice 2. (5 points)

On considère la suite (u_n) définie par :

$$u_0 = 0 \qquad \text{et} \qquad u_{n+1} = \frac{2u_n+3}{u_n+4}$$

1. On pose, pour tout entier n, $v_n = \dfrac{u_n - 1}{u_n + 3}$.

   (a) $$v_{n+1} = \frac{u_{n+1} - 1}{u_{n+1} + 3} = \frac{\dfrac{2u_n + 3}{u_n + 4} - 1}{\dfrac{2u_n + 3}{u_n + 4} + 3} = \frac{\dfrac{2u_n + 3 - u_n - 4}{u_n + 4}}{\dfrac{2u_n + 3 + 3u_n + 12}{u_n + 4}} = \frac{u_n - 1}{5u_n + 15}$$

   (b)
   $$v_{n+1} = \frac{1}{5} v_n$$
   donc (v_n) est une suite géométrique de raison $\dfrac{1}{5}$ et de premier terme $v_0 = \dfrac{u_0 - 1}{u_0 + 3} = -\dfrac{1}{3}$.

2. $v_n = -\dfrac{1}{3} \times \left(\dfrac{1}{5}\right)^n$, or comme $\dfrac{1}{5} < 1$:
   $$\lim_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{5}\right)^n = 0 \Longrightarrow \lim_{n \to +\infty} v_n = 0$$

3.
   $$\begin{aligned} & v_n = \frac{u_n - 1}{u_n + 3} \\ \iff\quad & v_n(u_n + 3) = u_n - 1 \\ \iff\quad & u_n(v_n - 1) + 3v_n = -1 \\ \iff\quad & u_n = \frac{-1 - 3v_n}{v_n - 1} \end{aligned}$$
   Par conséquent :
   $$\lim_{n \to +\infty} u_n = 1$$

<u>Exercice</u> 3. (2 points (1 bonus))

1. La suite (u_n) définie par
   $$\begin{cases} u_0 = 0 & \\ u_{n+1} = u_n + 2 & \text{si } n \text{ est pair} \\ u_{n+1} = u_n - 1 & \text{sinon} \end{cases}$$
   est une suite qui diverge vers $+\infty$ sans être croissante. En effet :
   $$u_0 = 0 \qquad u_1 = -1 \qquad u_2 = 1 \qquad u_3 = 0 \qquad u_4 = 3 \qquad u_5 = 2 \qquad u_6 = 4 \ldots\ldots$$
2. La suite $(v_n) = (-1)^n$ diverge sans pour autant que sa limite soit $+\infty$ ou $-\infty$.

Correction de l'interrogation n°5

Exercice 1. R.O.C (4 points)

1. Montrer, par récurrence, que pour tout réel x positif et pour tout entier n, on a :

$$(1+x)^n \geq 1+nx$$

2. Soit (u_n) une suite définie par $u_n = q^n$ (avec $q > 0$).
   (a) En utilisant la première question (on posera $q = x+1$) montrer que u_n a pour limite $+\infty$ lorsque $q > 1$.

(Hors Barème) Si $q \in]0;1[$, en posant $q' = \dfrac{1}{q} > 1$ démontrer que u_n converge ves 0

Preuve

1. Notons $\mathscr{P}(n)$ la propriété $(1+x)^n \geq 1+nx$ est vraie
   $\mathscr{P}(0)$ et $\mathscr{P}(1)$ sont évidentes
   Montrons que $\mathscr{P}(n) \Longrightarrow \mathscr{P}(n+1)$.
   On suppose donc que $(1+x)^n \geq 1+nx$ et on souhaite montrer que : $(1+x)^{n+1} \geq 1+(n+1)x$
   On a alors, pour tout $x \geq 0$:

$$\begin{aligned}
& (1+x)^n \geq 1+nx \\
\Longleftrightarrow\ & (1+x)^{n+1} \geq (1+nx)(1+x) \qquad \text{en multipliant membre à membre par } (1+x) > 0 \\
\Longleftrightarrow\ & (1+x)^{n+1} \geq 1+nx+x+nx^2 \\
\Longleftrightarrow\ & (1+x)^{n+1} \geq 1+(n+1)x+nx^2 \\
\Longleftrightarrow\ & (1+x)^{n+1} \geq 1+(n+1)x \qquad \text{puisque } nx^2 \geq 0
\end{aligned}$$

   Résumons : On a donc $\mathscr{P}(0)$ mais aussi, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\mathscr{P}(n) \Longrightarrow \mathscr{P}(n+1)$, par conséquent on a : pour tout réel x positif et pour tout entier n,

$$(1+x)^n \geq 1+nx$$

2. (a) $q > 1$
   Posons $x = q-1$, on a alors $x > 0$, et d'après l'inégalité de Bernoulli :

$$q^n = (1+x)^n \geq 1+nx$$

   Or, $\lim\limits_{n\to+\infty} 1+nx = +\infty$, par comparaison on en déduit :

$$\lim_{n\to+\infty} q^n = +\infty$$

   La suite (u_n) diverge donc vers $+\infty$

   (b) Posons $q' = \dfrac{1}{q}$, dans ce cas $q' \in]1;+\infty[$
   D'après le résultat précédent :

$$\lim_{n\to+\infty} q'^n = +\infty$$

   Par passage à l'inverse nous obtenons donc :

$$\lim_{n\to+\infty} q^n = 0$$

   La suite (u_n) converge donc vers 0

Exercice 2. (5 points)
On considère la suite (u_n) définie par :

$$u_0 = \frac{1}{2} \qquad \text{et} \qquad u_{n+1} = \frac{8u_n+3}{u_n+6}$$

1. On pose, pour tout entier n, $v_n = \dfrac{u_n-3}{u_n+1}$.

(a) $v_{n+1} = \dfrac{u_{n+1}-3}{u_{n+1}+1} = \dfrac{\dfrac{8u_n+3}{u_n+6}-3}{\dfrac{8u_n+3}{u_n+6}+1} = \dfrac{\dfrac{8u_n+3-3u_n-18}{u_n+6}}{\dfrac{8u_n+3+u_n+6}{u_n+6}} = \dfrac{5u_n-15}{9u_n+9}$

(b)

$$v_{n+1} = \frac{5}{9}v_n$$

donc (v_n) est une suite géométrique de raison $\dfrac{5}{9}$ et de premier terme $v_0 = \dfrac{u_0-3}{u_0+1} = \dfrac{-\dfrac{5}{2}}{\dfrac{3}{2}} = -\dfrac{5}{3}$.

2. $v_n = -\dfrac{5}{3} \times \left(\dfrac{5}{9}\right)^n$, or comme $\dfrac{5}{9} < 1$:

$$\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{5}{9}\right)^n = 0 \Longrightarrow \lim_{n\to+\infty} v_n = 0$$

3.

$$\begin{aligned} & v_n = \frac{u_n-3}{u_n+1} \\ \Longleftrightarrow\quad & v_n(u_n+1) = u_n-3 \\ \Longleftrightarrow\quad & u_n(v_n-1)+v_n = -3 \\ \Longleftrightarrow\quad & u_n = \frac{-3-v_n}{v_n-1} \end{aligned}$$

Par conséquent :

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = 3$$

<u>Exercice</u> 3. (2 points (1 bonus))

1. La suite (u_n) définie par

$$\begin{cases} u_0 = 0 & \\ u_{n+1} = u_n - 2 & \text{si } n \text{ est pair} \\ u_{n+1} = u_n + 1 & \text{sinon} \end{cases}$$

est une suite qui diverge vers $-\infty$ sans être décroissante. En effet :

$$u_0 = 0 \qquad u_1 = 1 \qquad u_2 = -1 \qquad u_3 = 0 \qquad u_4 = -2 \qquad u_5 = -1 \qquad u_6 = -3 \ldots\ldots$$

2. La suite $(v_n) = (-1)^n$ diverge sans pour autant que sa limite soit $+\infty$ ou $-\infty$.