Correction de l'interrogation n°4

Exercice 1. R.O.C (4 points)

On considère la suite (u_n) définie par $u_n = f(n)$, avec f définie sur l' intervalle $[a; +\infty[$, où $a \geq 0$

1. Si la fonction f est croissante (resp. strictement croissante) sur $[a; +\infty[$ montrer que la suite (u_n) est croissante (resp. strictement croissante).
2. Si la fonction f est décroissante (resp. strictement décroissante) sur $[a; +\infty[$ montrer que la suite (u_n) est décroissante (resp. strictement décroissante).

Preuve

1. Cas 1 : f est strictement croissante sur $[a; +\infty[$
   Pour tout entier $n \geq a$, f étant strictement croissante sur $[a; +\infty[$,
   $$f(n) < f(n+1) \Longleftrightarrow u_n < u_{n+1}$$
   Par conséquent, (u_n) est strictement croissante.
2. Cas 2 : f est strictement décroissante sur $[a; +\infty[$
   Pour tout entier $n \geq a$, f étant strictement décroissante sur $[a; +\infty[$,
   $$f(n) > f(n+1) \Longleftrightarrow u_n > u_{n+1}$$
   Par conséquent, (u_n) est strictement décroissante.

Exercice 2. (4 points)

On considère la suite (u_n) définie par :
$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = \dfrac{1}{2}u_n + 3 \end{cases}$$

1. Notons $\mathscr{P}(n)$ la propriété
   $$u_n = -4 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n + 6$$
   - *Initialisation* : On sait que $u_0 = 2$, de plus $-4 \times \left(\dfrac{1}{2}\right)^0 + 6 = -4 + 6 = 2 = u_0$.
     Par conséquent la propriété $\mathscr{P}$ est vraie au rang 0.
   - *Hérédité* : Supposons que la propriété $\mathscr{P}$ soit vraie au rang n et montrons que $\mathscr{P}$ est vraie au rang $n+1$.
     D'après l'hypothèse de récurrence on a $u_n = -4 \times \left(\dfrac{1}{2}\right)^n + 6$, donc :
     $$u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 3 = \frac{1}{2}\left[-4 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n + 6\right] + 3 = -4 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} + 3 + 3 = -4 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} + 6$$
     ce qui prouve la propriété $\mathscr{P}$ au rang $n+1$.
   - *Conclusion* : Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a :
     $$u_n = -4 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n + 6$$
2. Soit la suite (v_n) définie par $v_n = u_n - 6$ pour tout $n \in \mathbb{N}$
   (a) $\forall n \in \mathbb{N}$ on a :
   $$\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{u_{n+1} - 6}{u_n - 6} = \frac{\frac{1}{2}u_n + 3 - 6}{u_n - 6} = \frac{\frac{1}{2}u_n - 3}{u_n - 6} = \frac{\frac{1}{2}(u_n - 6)}{u_n - 6} = \frac{1}{2}$$
   La suite (v_n) est donc géométrique de raison $\dfrac{1}{2}$

   (b) On a :
   $$v_n = v_0 q^n = (u_0 - 6)\left(\frac{1}{2}\right)^n = -4 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

Exercice 3. (2 points)

Déterminer le sens de variation des suites suivantes :

1. $u_n = \dfrac{n^2}{n+1}$, $\forall n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \frac{(n+1)^2}{n+2} - \frac{n^2}{n+1} \\ &= \frac{(n+1)^3 - (n+2)n^2}{(n+1)(n+2)} \\ &= \frac{n^3 + 3n^2 + 3n + 1 - n^3 - 2n^2}{(n+1)(n+2)} \\ &= \frac{n^2 + 3n + 1}{(n+1)(n+2)} \end{aligned}$$

   Comme $n \in \mathbb{N}$ $u_{n+1} - u_n > 0 \iff u_{n+1} > u_n$ et donc la suite (u_n) est strictement croissante.

2. $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = \sqrt{v_n + 2}$ et $v_0 = -1$.
   Notons $\mathscr{P}(n)$: $v_{n+1} \geq v_n \geq -2$.
   - *Initialisation* : $v_0 = -1$ et $v_1 = 1$, donc $\mathscr{P}$ est vraie au rang 0.
   - *Hérédité* : Supposons que la propriété $\mathscr{P}$ soit vraie au rang n et montrons que $\mathscr{P}$ est vraie au rang $n+1$.
     D'après l'hypothèse de récurrence on a $v_{n+1} \geq v_n \geq -2 \iff v_{n+1} + 2 \geq v_n + 2 \geq 0$.
     Comme la fonction racine carrée est croissante sur $\mathbb{R}^+$ on a alors :

$$\sqrt{v_{n+1} + 2} \geq \sqrt{v_n + 2} \geq 0 \iff v_{n+2} \geq v_{n+1} \geq 0 \geq -2$$

     Par conséquent la propriété $\mathscr{P}$ est héréditaire.
   - *Conclusion* : On vient de montrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}$

$$v_{n+1} \geq v_n \geq -2$$

     ce qui prouve que la suite (v_n) est croissante.

Correction de l'interrogation n°4

Exercice 1. R.O.C (4 points)

On considère une suite arithmétique de raison r

1. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_n = u_0 + nr$
2. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $p \in \mathbb{N}$, on a $u_n = u_p + (n-p)r$

Preuve

1. Notons $\mathscr{P}(n)$ la propriété $u_n = u_0 + nr$.
   - *Initialisation* : pour $n = 0$, $u_0 + 0r = u_0$ par conséquent $\mathscr{P}$ est vraie (évidente ?) au rang 0.
   - *Hérédité* : Supposons que la propriété $\mathscr{P}$ soit vraie au rang n et montrons que $\mathscr{P}$ est vraie au rang $n+1$.

     D'après l'hypothèse de récurrence on a $u_n = u_0 + nr$, par conséquent :
     $$u_{n+1} = u_n + r = u_0 + nr + r = u_0 + (n+1)r$$
     La propriété $\mathscr{P}$ est vraie au rang $n+1$.
   - *Conclusion* : On a démontré par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$
     $$u_n = u_0 + nr$$
2. Comme $u_n = u_0 + nr$ et $u_p = u_0 + pr$ on a :
   $$u_n - u_p = nr - pr = (n-p)r \Longleftrightarrow u_n = u_p + (n-p)r$$

Exercice 2. (4 points)

On considère la suite (u_n) définie par :
$$\begin{cases} u_0 = 5 \\ u_{n+1} = \dfrac{3}{2}u_n - 1 \end{cases}$$

1. Notons $\mathscr{P}(n)$ la propriété
   $$u_n = 3 \times \left(\frac{3}{2}\right)^n + 2$$
   - *Initialisation* : On sait que $u_0 = 5$, de plus $3 \times \left(\frac{3}{2}\right)^0 + 2 = 3 + 2 = 5 = u_0$.

     Par conséquent la propriété $\mathscr{P}$ est vraie au rang 0.
   - *Hérédité* : Supposons que la propriété $\mathscr{P}$ soit vraie au rang n et montrons que $\mathscr{P}$ est vraie au rang $n+1$.

     D'après l'hypothèse de récurrence on a $u_n = 3 \times \left(\frac{3}{2}\right)^n + 2$, donc :
     $$u_{n+1} = \frac{3}{2}u_n - 1 = \frac{3}{2}\left[3 \times \left(\frac{3}{2}\right)^n + 2\right] - 1 = 3 \times \left(\frac{3}{2}\right)^{n+1} + 3 - 1 = 3 \times \left(\frac{3}{2}\right)^{n+1} + 2$$
     ce qui prouve la propriété $\mathscr{P}$ au rang $n+1$.
   - *Conclusion* : Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a :
     $$u_n = 3 \times \left(\frac{3}{2}\right)^n + 2$$
2. Soit la suite (v_n) définie par $v_n = u_n - 2$ pour tout $n \in \mathbb{N}$
   (a) $\forall n \in \mathbb{N}$ on a :
   $$\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{u_{n+1} - 2}{u_n - 2} = \frac{\frac{3}{2}u_n - 1 - 2}{u_n - 2} = \frac{\frac{3}{2}u_n - 3}{u_n - 2} = \frac{\frac{3}{2}(u_n - 2)}{u_n - 2} = \frac{3}{2}$$
   La suite (v_n) est donc géométrique de raison $\frac{3}{2}$

   (b) On a :
   $$v_n = v_0 q^n = (u_0 - 2)\left(\frac{2}{2}\right)^n = 3 \times \left(\frac{3}{2}\right)^n$$

<u>Exercice</u> 3. (2 points)

Déterminer le sens de variation des suites suivantes :

1. $u_n = \dfrac{3}{4n+2}$, $\forall n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n = & \quad \frac{3}{4(n+1)+2} - \frac{3}{4n+2} \\ = & \quad \frac{3(4n+2) - 3(4n+6)}{(4n+6)(4n+2)} \\ = & \quad \frac{12n+6-12n-18}{(4n+6)(4n+2)} \\ = & \quad \frac{-18}{(4n+6)(4n+2)} \end{aligned}$$

   Comme $n \in \mathbb{N}$ $u_{n+1} - u_n < 0 \iff u_{n+1} < u_n$ et donc la suite (u_n) est strictement décroissante.

2. $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = \sqrt{v_n + 2}$ et $v_0 = 6$.
   Notons $\mathscr{P}(n)$: $-2 \leq v_{n+1} \leq v_n$.
   - *Initialisation* : $v_0 = 6$ et $v_1 = 2\sqrt{2} \simeq 2,8 < 6$, donc $\mathscr{P}$ est vraie au rang 0.
   - *Hérédité* : Supposons que la propriété $\mathscr{P}$ soit vraie au rang n et montrons que $\mathscr{P}$ est vraie au rang $n+1$.
     D'après l'hypothèse de récurrence on a $-2 \leq v_{n+1} \leq v_n \iff 0 \leq v_{n+1} + 2 \leq v_n + 2$.
     Comme la fonction racine carrée est croissante sur $\mathbb{R}^+$ on a alors :

     $$0 \leq \sqrt{v_{n+1} + 2} \leq \sqrt{v_n + 2} \iff -2 < 0 \leq v_{n+2} \leq v_{n+1}$$

     Par conséquent la propriété $\mathscr{P}$ est héréditaire.
   - *Conclusion* : On vient de montrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}$

     $$-2 \leq v_{n+1} \leq v_n$$

     ce qui prouve que la suite (v_n) est décroissante.