Correction de l'interrogation n°3

Exercice 1. R.O.C (4 points)

1. Démontrer que, $\forall\theta \in \mathbb{R}$ et $\forall n \in \mathbb{Z}$ on a :

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta$$

2. Démontrer que, $\forall\theta \in \mathbb{R}$ et $\forall n \in \mathbb{Z}$ on a :

$$\sin\theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$$

Preuve

1. Utilisons les formes exponentielles :

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \left(e^{i\theta}\right)^n = e^{in\theta} = \cos n\theta + i\sin n\theta$$

ce qui prouve la première formule de Moivre.

2. $$e^{i\theta} - e^{-i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta - \cos(-\theta) - i\sin(-\theta) = \cos\theta + i\sin\theta - \cos\theta + i\sin\theta = 2i\sin\theta$$

d'où la deuxième formule d'Euler.

Exercice 2. (6 poins)

1. Notons $z_A = -4i$ l'affixe du point A et $z_B = 1$ l'affixe du point B, on a alors :

$$\begin{aligned}
M \in \mathscr{C} &\iff \mid z + 4i \mid = \mid z - 1 \mid \\
&\iff \mid z - z_A \mid = \mid z - z_B \mid \\
&\iff \mid z_{\overrightarrow{AM}} \mid = \mid z_{\overrightarrow{BM}} \mid \\
&\iff AM = BM \\
&\iff M \in \Delta \qquad \text{où } \Delta \text{ est la médiatrice du segment } [AB]
\end{aligned}$$

2. Déterminons une forme exponentielle de $(1+i)^2 = 1 + 2i - 1 = 2i$. Dans un premier temps on a :

$$\mid 2i \mid = 2$$

Puis

$$arg(2i) = \frac{\pi}{2}[2\pi]$$

Par conséquent :

$$e^{-i\dfrac{\pi}{12}} \times (1+i)^2 = e^{-i\frac{\pi}{12}} \times 2e^{i\frac{\pi}{2}} = 2e^{i\frac{7pi}{12}}$$

3. $$(z^2+8)(3z^2 - 4z + 3) = 0 \iff z^2 + 8 = 0 \text{ ou } 3z^2 - 4z + 3 = 0$$

Or

$$z^2 + 8 = 0 \iff z^2 = -8 \iff z = i\sqrt{8} \qquad \text{ou} \qquad z = -i\sqrt{8}$$

De plus, comme $\Delta = 16 - 4 \times 3 \times 3 = -20$:

$$3z^2 - 4z + 3 = 0 \iff z = \frac{4 + i\sqrt{20}}{6} = \frac{2 + i\sqrt{5}}{3} \qquad \text{ou } z = \frac{2 - i\sqrt{5}}{3}$$

Au final l'équation admet 4 solutions :

$$\mathscr{S} = \{2i\sqrt{2}; -2i\sqrt{2}; \frac{2+i\sqrt{5}}{3}; \frac{2-i\sqrt{5}}{3}\}$$

Correction de l'interrogation n°3

Exercice 1. R.O.C (4 points)

1. Démontrer que, $\forall\theta \in \mathbb{R}$ et $\forall n \in \mathbb{Z}$ on a :
$$(\cos\theta - i\sin\theta)^n = \cos n\theta - i\sin n\theta$$
2. Démontrer que, $\forall\theta \in \mathbb{R}$ et $\forall n \in \mathbb{Z}$ on a :
$$\cos\theta = \frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}$$

Preuve

1. Utilisons les formes exponentielles :
$$(\cos\theta - i\sin\theta)^n = (\cos(-\theta)+i\sin(-\theta))^n = \left(e^{-i\theta}\right)^n = e^{-in\theta} = \cos n\theta - i\sin n\theta$$
ce qui prouve la deuxième formule de Moivre.
2. $$e^{i\theta}+e^{-i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta + \cos(-\theta) + i\sin(-\theta) = \cos\theta + i\sin\theta + \cos\theta - i\sin\theta = 2\cos\theta$$
d'où la première formule d'Euler.

Exercice 2. (6 poins)

1. Notons $z_A = 4i$ l'affixe du point A et $z_B = -1$ l'affixe du point B, on a alors :
$$\begin{aligned}
M \in \mathscr{C} &\iff \quad | z-4i |=| z+1 | \\
&\iff \quad | z-z_A |=| z-z_B | \\
&\iff \quad | z_{\overrightarrow{AM}} |=| z_{\overrightarrow{BM}} | \\
&\iff \quad AM = BM \\
&\iff \quad M \in \Delta \qquad \text{où } \Delta \text{ est la médiatrice du segment } [AB]
\end{aligned}$$
2. Déterminons une forme exponentielle de $\sqrt{2}+i\sqrt{2}$. Dans un premier temps on a :
$$| \sqrt{2}+i\sqrt{2} |= \sqrt{2+2} = 2$$
Puis comme $2\cos\theta = \sqrt{2}$ et $2\sin\theta = \sqrt{2}$ alors on a :
$$\theta = \frac{\pi}{4}[2\pi]$$
Déterminons une forme exponentielle de $1+i\sqrt{3}$. Dans un premier temps on a :
$$| 1+i\sqrt{3} |= \sqrt{1+3} = 2$$
Puis comme $2\cos\theta = 1$ et $2\sin\theta = \sqrt{3}$ alors on a :
$$\theta = \frac{\pi}{3}[2\pi]$$
Par conséquent :
$$\frac{\sqrt{2}+i\sqrt{2}}{1+i\sqrt{3}} = \frac{2e^{i\frac{\pi}{4}}}{2e^{i\frac{\pi}{3}}} = e^{i\left(\frac{pi}{4}-\frac{\pi}{3}\right)} = e^{-i\frac{\pi}{12}}$$
3. $$(z^2+4)(2z^2-4z+4) = 0 \iff z^2+4=0 \text{ ou } 2z^2-4z+4=0$$
Or
$$z^2+4=0 \iff z^2=-4 \iff z = i\sqrt{4} = 2i \qquad \text{ou} \qquad z=-2i$$
De plus, comme $\Delta = 16-4\times2\times4 = -16$:
$$2z^2-4z+4=0 \iff z = \frac{4+i\sqrt{16}}{4} = 1+i \qquad \text{ou } z = 1-i$$
Au final l'équation admet 4 solutions :
$$\mathscr{S} = \{2i; -2i; 1+i; 1-i\}$$