Correction de l'interrogation n°2

Exercice 1. R.O.C (4 points)

Soit z un nombre complexe et $\bar{z}$ son conjugué.

1. Montrer que $z\bar{z} = |z|^2$
2. En déduire que
$$|zz'| = |z||z'| \qquad \text{et} \qquad \left|\frac{z}{z'}\right| = \frac{|z|}{|z'|}$$
.

Preuve

1. $z\overline{z} = (x+iy)(x-iy) = x^2 - ixy + ixy - i^2y = x^2 + y^2 = |z|^2$
2. $$|zz'|^2 = zz'\overline{zz'} = zz'\overline{z}\overline{z'} = z\overline{z}z'\overline{z'} = |z|^2|z'|^2$$
Comme un module est positif on obtient : $|zz'| = |z||z'|$
$$\left|\frac{z}{z'}\right|^2 = \frac{z}{z'}\frac{\overline{z}}{z'} = \frac{z\overline{z}}{z'\overline{z'}} = \frac{|z|^2}{|z'|^2}$$
Comme un module est positif on obtient : $\left|\frac{z}{z'}\right| = \frac{|z|}{|z'|}$

Exercice 2. (6 poins)

1.
$$\begin{aligned}
& z' \text{ est réel} \\
\iff\ & z' = \bar{z}' \\
\iff\ & \frac{iz}{2-z} = \frac{-i\bar{z}}{2-\bar{z}} \\
\iff\ & iz(2-\bar{z}) = -i\bar{z}(2-z) \\
\iff\ & 2iz - iz\bar{z} = -2i\bar{z} + iz\bar{z} \\
\iff\ & 2iz + 2i\bar{z} - 2iz\bar{z} = 0 \\
\iff\ & z + \bar{z} - z\bar{z} = 0 \\
\iff\ & x + iy + x - iy - x^2 - y^2 = 0 \\
\iff\ & x^2 + y^2 - 2x = 0 \\
\iff\ & (x-1)^2 - 1 + y^2 = 0 \\
\iff\ & (x-1)^2 + y^2 = 1
\end{aligned}$$

2. $|z| = \sqrt{1+3} = 2$
Donc, $z = 2\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)$
Par conséquent $\frac{\pi}{3}$ est un argument de z
3. $z = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)$

Correction de l'interrogation n°2

<u>Exercice</u> 1. R.O.C (4 points)

Soient z et z' deux nombres complexes, montrer que :

1. $\overline{z+z'} = \overline{z} + \overline{z'}$
2. $\overline{-z} = -\overline{z}$
3. $\overline{zz'} = \overline{z}\,\overline{z'}$
4. $\overline{\left(\dfrac{z}{z'}\right)} = \dfrac{\overline{z}}{\overline{z'}}$ (avec $z' \neq 0$)

<u>Preuve</u>

Soit $z = x + iy$ et $z' = x - iy$ (avec x, y, x' et y' réels), alors :

$$\overline{z+z'} = \overline{x+iy+x'+iy'} = \overline{x+x'+i(y+y')} = x+x'-i(y+y')$$

$$\overline{z} + \overline{z'} = \overline{x+iy} + \overline{x'+iy'} = x - iy + x' - iy' = x + x' - i(y+y')$$

Par conséquent $\overline{z+z'} = \overline{z} + \overline{z'}$.
On démontre de manière similaire les autres égalités.

<u>Exercice</u> 2. (6 poins)

1.

$$\begin{aligned}
& z' \text{ est un imaginaire pur} \\
\iff\quad & z' = -\bar{z'} \\
\iff\quad & \frac{iz}{2-z} = -\frac{-i\bar{z}}{2-\bar{z}} \\
\iff\quad & \frac{iz}{2-z} = \frac{i\bar{z}}{2-\bar{z}} \\
\iff\quad & iz(2-\bar{z}) = i\bar{z}(2-z) \\
\iff\quad & 2iz - iz\bar{z} = 2i\bar{z} - iz\bar{z} \\
\iff\quad & 2iz - 2i\bar{z} = 0 \\
\iff\quad & z - \bar{z} = 0 \\
\iff\quad & z = \bar{z} \\
\iff\quad & z \in \mathbb{R}
\end{aligned}$$

2. $|z| = \sqrt{2+2} = 2$

   Donc, $z = 2\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2} + \dfrac{\sqrt{2}}{2}i\right) = 2\left(\cos\dfrac{\pi}{4} + i\sin\dfrac{\pi}{4}\right)$

   Par conséquent $\dfrac{\pi}{4}$ est un argument de z

3. $z = 2\left(\cos\dfrac{\pi}{4} + i\sin\dfrac{\pi}{4}\right)$