Proposition 1 :

1. Démontrer qu'un nombre complexe z est imaginaire pur si et seulement si $\overline{z} = -z$.
2. Démontrer qu'un nombre complexe z est réel si et seulement si $\overline{z} = z$.
3. Démontrer que pour tout nombre complexe z, on a l'égalité : $z\overline{z} = |z|^2$.

Preuve

1. et 2. Notons $z = x + iy$ avec x et y deux réels. Ainsi :

$$z + \overline{z} = x + iy + x - iy = 2x = 2\Re e(z) \text{ et } z - \overline{z} = x + iy - (x - iy) = 2iy = 2i\Im m(z)$$

On en déduit immédiatement que :

$$z \text{ est réel} \Longleftrightarrow \Im m(z) = 0 \Longleftrightarrow z - \overline{z} = 0 \Longleftrightarrow z = \overline{z}$$

$$z \text{ est imaginaire pur} \Longleftrightarrow \Re e(z) = 0 \Longleftrightarrow z + \overline{z} = 0 \Longleftrightarrow z = -\overline{z}$$

2. $z\overline{z} = (x + iy)(x - iy) = x^2 - ixy + ixy - i^2y = x^2 + y^2 = |z|^2$

Exercice 1. Liban 3 juin 2010

Pour chacune des propositions suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse, et donner une justification de la réponse choisie.

Une réponse non justifiée ne rapporte aucun point. Toutefois, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative, même nonfructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.

1. Une urne contient une boule blanche et deux boules noires. On effectue 10 tirages successifs d'une boule avec remise (on tire une boule au hasard, on note sa couleur, on la remet dans l'urne et on recommence).

   Proposition 1 : « La probabilité de tirer exactement 3 boules blanches est
   $3 \times \left(\frac{1}{3}\right)^3 \times \left(\frac{2}{3}\right)^7$. »
   Notons X la variable aléatoire qui compte le nombre de boules blanches tirées, comme on effectue 10 tirages avec remise, on reproduit donc 10 fois une même expérience, X suit une loi binomiale de paramètre 10 et $\frac{1}{3}$ i.e :

$$X \hookrightarrow B\left(10, \frac{1}{3}\right)$$

   On a donc :

$$P(X = 3) = \binom{10}{3} \times \left(\frac{1}{3}\right)^3 \times \left(\frac{2}{3}\right)^7 = 120 \times \left(\frac{1}{3}\right)^3 \times \left(\frac{2}{3}\right)^7$$

   La proposition est donc fausse.
2. Une variable aléatoire X suit la loi exponentielle de paramètre $\lambda (\lambda > 0)$.

Proposition 2 : « Le réel a tel que $p(\mathrm{X} > a) = p(\mathrm{X} \leqslant a)$ est égal à $\dfrac{\ln 2}{\lambda}$. »

$$\begin{aligned}
& p(\mathrm{X} > a) = p(\mathrm{X} \leq a) \\
\iff \quad & 1 - p(\mathrm{X} \leq a) = p(\mathrm{X} \leq a) \\
\iff \quad & p(\mathrm{X} \leq a) = \frac{1}{2} \\
\iff \quad & \int_0^a \lambda \mathrm{e}^{-\lambda t}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2} \\
\iff \quad & \left[-e^{-\lambda t}\right]_0^a = \frac{1}{2} \\
\iff \quad & -e^{-\lambda a} + 1 = \frac{1}{2} \\
\iff \quad & e^{-\lambda a} = \frac{1}{2} \\
\iff \quad & -\lambda a = \ln \frac{1}{2} = -\ln 2 \\
\iff \quad & a = \frac{\ln 2}{\lambda}
\end{aligned}$$

Ainsi la proposition 2 est vraie.

Proposition 2 :
Démontrer la formule d'intégration par parties en utilisant la formule de dérivation d'un produit de deux fonctions dérivables, à dérivées continues sur un intervalle $[a\ ;\ b]$.

Preuve

On sait que pour tout $t \in [a;b]$ on a :

$$(uv)'(t) = u'(t)v(t) + u(t)v'(t)$$

En intégrant membre à membre, sur le segment $[a;b]$, on obtient :

$$\int_a^b (uv)'(t)dt = \int_a^b u'(t)v(t) + u(t)v'(t)dt = \int_a^b u'(t)v(t)dt + \int_a^b u(t)v'(t)dt$$

Ainsi :

$$[u(t)v(t)]_a^b = \int_a^b u'(t)v(t)dt + \int_a^b u(t)v'(t)dt$$

i.e :

$$\int_a^b u(t)v'(t)dt = [u(t)v(t)]_a^b - \int_a^b u'(t)v(t)dt$$

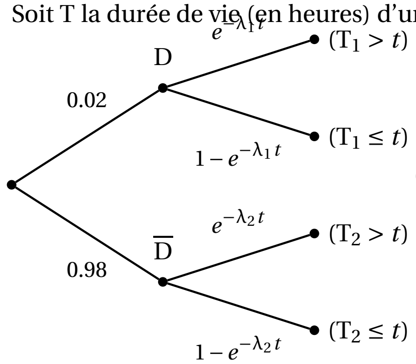
Exercice 2.

On suppose que la durée de vie T_1 (en heures) de chaque composant défectueux suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda_1 = 5 \times 10^{-4}$ et que la durée de vie T_2 (en heures) de chaque composant non défectueux suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda_2 = 10^{-4}$ (on pourra se reporter au formulaire ci-dessous).

1. Calculer la probabilité que la durée de vie d'un composant soit supérieure à 1000 heures :
   (a) $p(T_1 > 1000) = 1 - p(T_1 \leq 1000) = 1 - \int_0^{1000} \lambda_1 e^{-\lambda_1 t} dt = 1 - \left[-e^{-\lambda_1 t}\right]_0^{1000} = 1 + e^{-\lambda_1 \times 1000} - 1 = e^{-\frac{1}{2}} \simeq 0,61$
   (b) En procédant de manière identique on trouve :

$$p(T_2 > 1000) = 1 - p(T_2 \leq 1000) = 1 - \int_0^{1000} \lambda_2 e^{-\lambda_2 t} dt = 1 - \left[-e^{-\lambda_2 t}\right]_0^{1000} = 1 + e^{-\lambda_2 \times 1000} - 1 = e^{-\frac{1}{10}} \simeq 0,90$$

2. Soit T la durée de vie (en heures) d'un composant acheté au hasard.



On applique alors la formule des probabilités totale et on a :

$$p(T \leq t) = P(D \cap (T_1 > t)) + P(D \cap (T_2 > t)) = 0,02e^{-5\times 10^{-4}t} + 0,98e^{-10^{-4}t}$$

3. On calcule :

$$P_{T>1000}(D) = \frac{P((T > 1000) \cap D)}{P(T > 1000)} = \frac{P(T_1 > 1000)}{P(T > 1000)} = \frac{0,02 \times e^{-\frac{1}{2}}}{0,02e^{-\frac{1}{2}} + 0,98e^{-\frac{1}{10}}}$$