Correction de l'interrogation n°1

Exercice 1. R.O.C (4 points)

Soient x, y, x' et y' quatre nombre réels, alors :

1. Montrer que $x+iy=0 \Longleftrightarrow x=0$ et $y=0$
2. En déduire que $x+iy=x'+iy' \Longleftrightarrow x=x'$ et $y=y'$

Preuve

1. Montrons dans un premier que
$$x+iy=0 \Longleftrightarrow x=0 \text{ et } y=0$$
$\Leftarrow$) Si $x=0$ et $y=0$ alors $x+iy=0$
$\Rightarrow$) Supposons que $y \neq 0$, dans ce cas on a : $i=-\dfrac{x}{y}$ et par conséquent $i \in \mathbb{R}$, or il n'existe pas de nombres réels tels que $i^2=-1$. Notre hypothèse est donc absurde, ce qui signifie que $y=0$ et donc $x+0=0 \Longleftrightarrow x=0$
2. Considérons désormais deux nombres complexes z et z' tels que
$$z=x+iy \qquad\qquad z'=x'+iy'$$
et montrons que
$$z=z' \Longleftrightarrow x+iy=x'+iy' \Longleftrightarrow x=x' \text{ et } y=y'$$
$\Leftarrow$) Si $x=x'$ et $y=y'$ alors de manière évidente $z=z'$
$\Rightarrow$) Si $z=z'$ montrons que $x=x'$ et $y=y'$
Comme $z=z'$, on a $z-z'=0 \Longleftrightarrow x-x'+i(y-y')=0$, par conséquent d'après la première partie de la démonstration :
$$x-x'=0 \Longleftrightarrow x=x' \qquad \text{et} \qquad y-y'=0 \Longleftrightarrow y=y'$$

Exercice 2. (6 poins)

1. (a) $\left(\dfrac{3}{4}-2i\right)^2=\dfrac{9}{16}-\dfrac{12}{4}i+4i^2=\dfrac{9}{16}-3i-4=\dfrac{9-64}{16}-3i=-\dfrac{55}{16}-3i$

   (b) $\dfrac{1}{2+2i}=\dfrac{2-2i}{(2+2i)(2-2i)}=\dfrac{2-2i}{4-4i^2}=\dfrac{2-2i}{4+4}=\dfrac{2-2i}{8}=\dfrac{1}{4}-\dfrac{1}{4}i$

2. (a)
$$\begin{aligned}
& \frac{z-2+i}{iz+1}=2i \\
\Longleftrightarrow\quad & z-2+i=2i(iz+1) \\
\Longleftrightarrow\quad & z-2+i=-2z+2i \\
\Longleftrightarrow\quad & z+2z=2+i \\
\Longleftrightarrow\quad & 3z=2+i \\
\Longleftrightarrow\quad & z=\frac{2}{3}+\frac{1}{3}i
\end{aligned}$$

   (b)
$$\begin{aligned}
& i(z+3i)=(-1-i)z+2 \\
\Longleftrightarrow\quad & iz-3=(-1-i)z+2 \\
\Longleftrightarrow\quad & iz-(-1-i)z=5 \\
\Longleftrightarrow\quad & z(i+1+i)=5 \\
\Longleftrightarrow\quad & z(2i+1)=5 \\
\Longleftrightarrow\quad & z=\frac{5}{2i+1}=\frac{5(1-2i)}{5}=\frac{5-10i}{5}=1-2i
\end{aligned}$$

3. O étant le milieu du segment $[AA']$, le vecteur $\overrightarrow{AO}$ et le vecteur $\overrightarrow{OA'}$ ont la même affixe i.e :

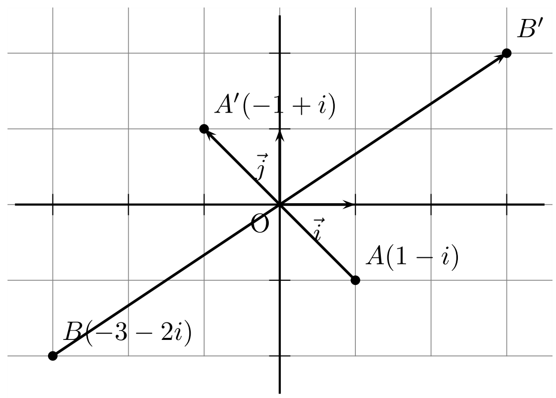
$$z_{A'} - z_O = z_O - z_A \Longleftrightarrow z_{A'} = -z_A$$

   Par conséquent $z_{A'} = -1 + i$.
   De la même manière on démontre que $z_{B'} = -z_B = 3 + 2i$

4. L'affixe des vecteurs $\overrightarrow{AA'}$ et $\overrightarrow{BB'}$ est :

$$z_{\overrightarrow{AA'}} = z_{A'} - z_A = -1 + i - 1 + i = -2 + 2i$$

$$z_{\overrightarrow{BB'}} = z_{B'} - z_B = 3 + 2i + 3 + 2i = 6 + 4i$$



Correction de l'interrogation n°1

<u>Exercice</u> 1. R.O.C (4 points)

Soit z un nombre complexe et $\bar{z}$ son conjugué.

1. Montrer que $z+\bar{z}=2\Re\mathrm{e}(z)$ et $z-\bar{z}=2i\Im\mathrm{m}(z)$
2. En déduire que

$$z \text{ est réel} \Longleftrightarrow z=\overline{z} \qquad \text{et} \qquad z \text{ est imaginaire pur } \Longleftrightarrow z=-\overline{z}$$

.

<u>Preuve</u>

Notons $z=x+iy$ avec x et y deux réels. Ainsi :

$$z+\overline{z}=x+iy+x-iy=2x=2\Re\mathrm{e}(z) \text{ et } z-\overline{z}=x+iy-(x-iy)=2iy=2i\Im\mathrm{m}(z)$$

On en déduit immédiatement que :

$$z \text{ est réel} \Longleftrightarrow \Im\mathrm{m}(z)=0 \Longleftrightarrow z-\overline{z}=0 \Longleftrightarrow z=\overline{z}$$

$$z \text{ est imaginaire pur} \Longleftrightarrow \Re\mathrm{e}(z)=0 \Longleftrightarrow z+\overline{z}=0 \Longleftrightarrow z=-\overline{z}$$

<u>Exercice</u> 2. (6 poins)

1. (a) $(3-i)(7+2i)=21+6i-7i-2i^2=21-i+2=23-i$

   (b) $3-\dfrac{1}{i}=3-\dfrac{i}{i^2}=3+i$

2. (a)

$$\begin{aligned}
& \frac{z-i}{z+i}=2i \\
\Longleftrightarrow \quad & z-i=2i(z+i) \\
\Longleftrightarrow \quad & z=2iz-2+i \\
\Longleftrightarrow \quad & z-2iz=-2+i \\
\Longleftrightarrow \quad & z(1-2i)=-2+i \\
\Longleftrightarrow \quad & z=\frac{-2+i}{1-2i} \\
\Longleftrightarrow \quad & z=\frac{(-2+i)(1+2i)}{5}=\frac{-2-4i+i-2}{5}=\frac{-4-4i}{5}=-\frac{4}{5}-\frac{4}{5}i
\end{aligned}$$

   (b)

$$\begin{aligned}
& -7z+2i=(-1-i)z+2 \\
\Longleftrightarrow \quad & -7z-(-1-i)z=2-2i \\
\Longleftrightarrow \quad & z(-7+1+i)=2-2i \\
\Longleftrightarrow \quad & z(-6+i)=2-2i \\
\Longleftrightarrow \quad & z=\frac{2-2i}{-6+i} \\
\Longleftrightarrow \quad & z=\frac{(2-2i)(-6-i)}{37} \\
\Longleftrightarrow \quad & z=\frac{-12-2i+12i-2}{37} \\
\Longleftrightarrow \quad & z=\frac{-14+10i}{37} \\
\Longleftrightarrow \quad & z=\frac{-14}{37}+\frac{10}{37}i
\end{aligned}$$

3. Placer dans un repère orthonormé $(O;\vec{e_1},\vec{e_2})$ les points A et B d'affixes respectives $1+i$ et $-3+2i$.
O étant le milieu du segment $[AA']$, le vecteur $\overrightarrow{AO}$ et le vecteur $\overrightarrow{OA'}$ ont la même affixe i.e :

$$z_{A'} - z_O = z_O - z_A \Longleftrightarrow z_{A'} = -z_A$$

Par conséquent $z_{A'} = -1-i$.
De la même manière on démontre que $z_{B'} = -z_B = 3-2i$

4. L'affixe des vecteurs $\overrightarrow{AA'}$ et $\overrightarrow{BB'}$ est :

$$z_{\overrightarrow{AA'}} = z_{A'} - z_A = -1-i-1-i = -2-2i$$

$$z_{\overrightarrow{BB'}} = z_{B'} - z_B = 3-2i+3-2i = 6-4i$$