Proposition 1 :

R.O.C (4 points)

On considère l'espace muni d'un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ Montrer l'équation cartésienne d'un plan dont on connaît un vecteur normal $\vec{n}(a; b; c)$ et un point $A(x_0; y_0; z_0)$ est de la forme :

$$ax + by + cz + d = 0$$

Preuve

On a, pour tout point M du plan P,

$$\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0$$

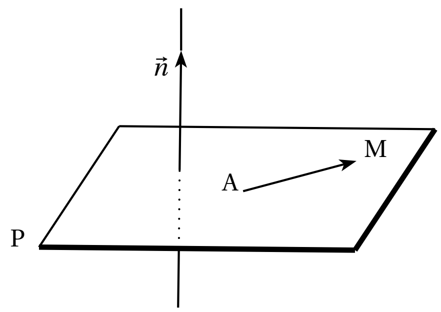
Réciproquement, si M est un point de l'espace tel que $\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0$, alors $M \in P$ On a donc le résultat suivant :

$$M(x; y; z) \in P \Longleftrightarrow \overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0$$

i.e

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0 \Longleftrightarrow ax + by + cz - ax_0 - by_0 - cz_0 = 0$$

En posant $d = -ax_0 - by_0 - cz_0$ on obtient le résultat désiré



Exercice 1. (6 points)

1. L'espace E est rapporté à un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Les points A, B, C et D ont pour coordonnées respectives :

$$(-1\ ;\ 0\ ;\ 2), \quad (3\ ;\ 2\ ;\ -4), \quad (1\ ;\ -4\ ;\ 2), \quad (5\ ;\ -2\ ;\ 4).$$

On considère les points I, J et K définis par : I est le milieu du segment [AB], K est le milieu de [CD] et $\overrightarrow{BJ} = \frac{1}{4}\overrightarrow{BC}$.

(a)

$$I\left(\frac{-1+3}{2}; \frac{0+2}{2}; \frac{2-4}{2}\right) \Longrightarrow I(1; 1; -1)$$

$$K\left(\frac{1+5}{2}; \frac{-4-2}{2}; \frac{2+4}{2}\right) \Longrightarrow K(3; -3; 3)$$

$$\overrightarrow{BJ} - \frac{1}{4}\overrightarrow{BC} = \vec{0} \Longleftrightarrow 4\overrightarrow{BJ} - \overrightarrow{BJ} - \overrightarrow{JC} = \vec{0} \Longleftrightarrow 3\overrightarrow{BJ} + \overrightarrow{CJ} = \vec{0}$$

J est donc le barycentre des points B et C affecté des coefficients 3 et 1, d'où :

$$J\left(\frac{3 \times 3 + 1}{4}; \frac{3 \times 2 - 4}{4}; \frac{3 \times (-4) + 2}{4}\right) \Longleftrightarrow J\left(\frac{5}{2}; \frac{1}{2}; -\frac{5}{2}\right)$$

(b)

$$\overrightarrow{IJ}\left(\frac{3}{2}; -\frac{7}{2}; -\frac{3}{2}\right)$$

et

$$\overrightarrow{JK}(2; -4; 4)$$

Pour passer de $\frac{3}{2}$ à 2 on multiplie par $\frac{4}{3}$ et pour passer de $-\frac{7}{2}$ à -4 on multiplie par $\frac{8}{7}$ par conséquent il n'existe pas de réel t tel que $\overrightarrow{IJ} = t\overrightarrow{JK}$, ce qui implique que les points I, J et K ne sont pas alignés.

(c) D'après la question précédente les points I, J et K définissent un plan, il n'y a donc plus qu'à vérifié que leurs coordonnées vérifient l'équation proposée :

$$8 \times 1 + 9 - 5 - 12 = 17 - 17 = 0$$

$$24 - 27 + 15 - 12 = -3 + 3 = 0$$

$$20 + 4,5 - 12,5 - 12 = 24,5 - 24,5 = 0$$

Ainsi une équation cartésienne du plan (IJK) est bien $8x + 9y + 5z - 12 = 0$.

2. Plus généralement, dans l'espace E, on considère un tétraèdre ABCD ainsi que les points I, J, K et L définis par I est le milieu du segment [AB], K est le milieu du segment [CD].

$$\overrightarrow{AL} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AD} \qquad \text{et} \qquad \overrightarrow{BJ} = \frac{1}{4}\overrightarrow{BC}$$

Soit G le barycentre de $\{(A,3),(B,3),(C,1),D,1)\}$.

(a) On a :

$$\overrightarrow{AL} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AD} \iff 4\overrightarrow{AL} - \overrightarrow{AD} = \vec{0} \iff 4\overrightarrow{AL} - \overrightarrow{AL} - \overrightarrow{LD} = \vec{0} \iff 3\overrightarrow{LA} + \overrightarrow{LD} = \vec{0}$$

L est donc le barycentre de $\{(A,3),(D,1)\}$.
De même, on a montré plus tôt que J est le barycentre de $\{(B,3),(C,1)\}$

(b) G est le barycentre de $\{(A,3),(B,3),(C,1),D,1)\}$ donc de $\{(A,3),(J,4),(D,1)\}$ donc de $\{(L,4),(J,4)\}$, i.e G est le milieu du segment [LJ].
De même G est le barycentre de $\{(A,3),(B,3),(C,1),D,1)\}$ donc de $\{(I,6),(C,1),(D,1)\}$ donc de $\{(I,6),(K,2)\}$, ainsi $G \in (IK)$.
Les droites (LJ) et (IK) sont sécantes en G et définissent donc un plan (elles ne sont pas identiques puisque I, J et K ne sont pas alignés).

Proposition 2 :

Si X suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$, on rappelle que pour tout $t \geqslant 0$, $P(X \leqslant t) = \int_0^t \lambda e^{-\lambda x}\,dx$.

La fonction R définie sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$ par $R(t) = P(X > t)$ est appelée fonction de fiabilité.

1. Démontrer que pour tout $t \geqslant 0$ on a $R(t) = e^{-\lambda t}$.
2. Démontrer que la variable X suit une loi de durée de vie sans vieillissement, c'est-à-dire que pour tout réel $s \geqslant 0$, la probabilité conditionnelle $P_{X>t}(X > t+s)$ ne dépend pas du nombre $t \geqslant 0$.

Preuve

1. On a, $\forall t \in \mathbb{R}$:

$$R(t) = P(X > t) = 1 - P(X \leq t) = 1 - \int_0^t \lambda e^{-\lambda x}\,dx = 1 - \left[-e^{-\lambda x}\right]_0^t = 1 + e^{-\lambda t} - 1 = e^{-\lambda t}$$

2. Soit s un réel strictement positif on a :

$$P_{X>t}(X > t+s) = \frac{P\left((X > t) \cap (X > t+s)\right)}{P(X > t)} = \frac{P(X > t+s)}{P(X > t)} = \frac{e^{-\lambda(t+s)}}{e^{-\lambda t}} = e^{-\lambda s} = P(X > s)$$

   Ainsi X suit bien une loi de durée sans vieillissement.

Exercice 2. (6 points)

L'espace E est rapporté à un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. On considère les points A, B et C de coordonnées respectives $(1\,;0\,;2)$, $(1\,;1\,;4)$ et $(-1\,;\,1\,;\,1)$.

Soit t un réel positif quelconque. On considère le barycentre G des points A, B et C affectés des coefficients respectifs 1, 2 et t.

1. $1 + 2 + t \geq 3$ donc G existe.
2. Soit I le barycentre des points A et B affectés des coefficients respectifs 1 et 2.

$$I\left(\frac{1+2}{3}; \frac{0+2}{3}; \frac{2+8}{3}\right) \Longrightarrow I\left(1; \frac{2}{3}; \frac{10}{3}\right)$$

3. G est le barycentre des points A, B et C affectés des coefficients respectifs 1, 2 et t, donc d'après l'associativité du barycentre G est le barycentre des points I et C affectés respectivement des coefficients 3 et t, par conséquent $G \in (IC)$.
4. D'après la question précédente on a :

$$3\overrightarrow{GI} + t\overrightarrow{GC} = \vec{0} \Longleftrightarrow 3\overrightarrow{GI} + t\overrightarrow{GI} + t\overrightarrow{IC} = \vec{0} \Longleftrightarrow \overrightarrow{IG} = \frac{t}{t+3}\overrightarrow{IC}$$

5. Lorsque t décrit l'ensemble des réels positifs alors $\frac{t}{t+3}$ décrit l'intervalle $[0;1[$, on a en effet :

$$0 \leq \frac{t}{t+3} < 1$$

   ce qui, à l'aide de l'égalité $\overrightarrow{IG} = \frac{t}{t+3}\overrightarrow{IC}$, montre que lorsque t parcourt les réels positifs G parcourt le segment [AC] sans jamais parvenir à atteindre le point C. Espérons que ce n'était pas son but...
6. Pour $t = 3$, G est l'isobarycentre des points I et C i.e le milieu du segment [IC].