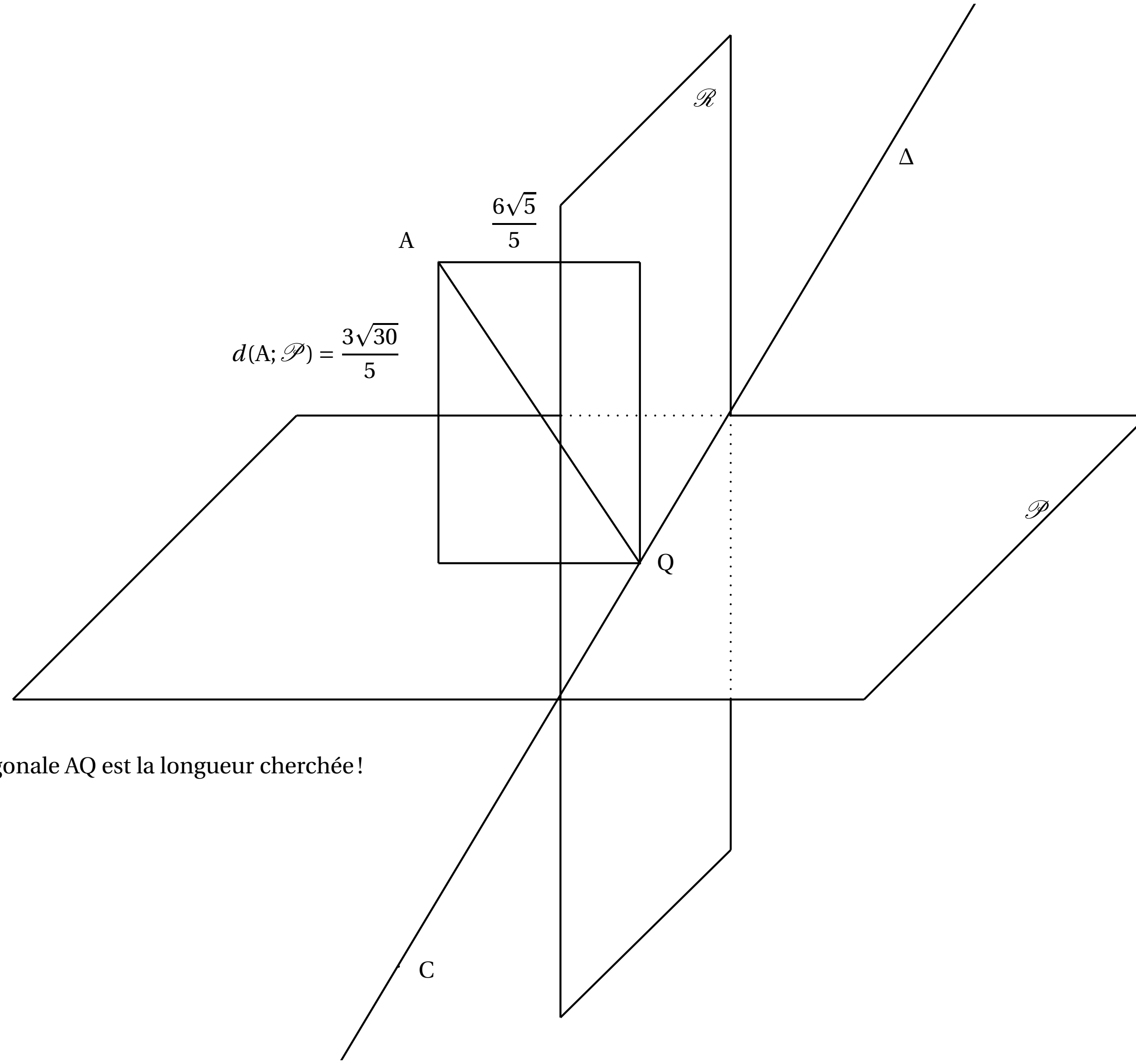
Métropole septembre 2005

L'espace est muni d'un repère orthonormal $(\mathrm{O};\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.

1. On considère le plan $\mathscr{P}$ passant par le point $\mathrm{B}(1\,;\,-2\,;\,1)$ et de vecteur normal $\overrightarrow{n}\,(-2\,;\,1\,;\,5)$ et le plan $\mathscr{R}$ d'équation cartésienne
   $x+2y-7=0$.
   (a) Les plans $\mathscr{P}$ et $\mathscr{Q}$ sont perpendiculaires si et seulement si leurs vecteurs normaux sont eux-mêmes orthogonaux. Notons $\vec{n'}(1;2;0)$ un vecteur normal du plan $\mathscr{R}$, on a alors :
   $$\vec{n}\cdot\vec{n'}=-2\times1+1\times2+0=0\iff\vec{n}\perp\vec{n'}\iff\mathscr{P}\perp\mathscr{R}$$
   (b) Déterminons dans un premier temps l'équation cartésienne du plan $\mathscr{P}$:
   $$\mathrm{M}(x;y;z)\in\mathscr{P}\iff\overrightarrow{\mathrm{BM}}\cdot\vec{n}=0\iff-2(x-1)+(y+2)+5(z-1)=0\iff-2x+y+5z-1=0$$
   Déterminons l'intersection des plans $\mathscr{P}$ et $\mathscr{R}$:
   $$\begin{cases}-2x+y+5z-1=0\\x+2y-7=0\end{cases}\iff\begin{cases}-2x+y+5z-1=0\\x=-2y+7\end{cases}\iff\begin{cases}-2(-2y+7)+y+5z-1=0\Longrightarrow5z=15-5y\Longrightarrow z=3-y\\x=-2y+7\end{cases}$$
   En posant $y=t$ avec $t\in\mathbb{R}$, on obtient une représentation paramétrique de la droite d'intersection des plans $\mathscr{P}$ et $\mathscr{R}$, disons $\mathscr{D}$:
   $$\begin{cases}x=-2t+7\\y=t\\z=-t+3\end{cases}\qquad t\in\mathbb{R}$$
   Un vecteur directeur de cette droite est $\vec{d}(-2;1;-1)=-\vec{u}$, ainsi $\vec{u}$ est aussi un vecteur directeur de $\mathscr{D}$.
   Enfin si $x=-1$ alors $-2t+7=-1\iff t=4$ et dans ce cas $y=4$ et $z=-4+3=-1$, ce qui démontre que $\mathrm{C}(-1;4;-1)\in\mathscr{D}$ et par conséquent que $\mathscr{D}=\Delta$.
   (c) On a :
   $$d(\mathrm{A};\mathscr{P})=\frac{|\,ax_\mathrm{A}+by_\mathrm{A}+cz_\mathrm{A}+d\,|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}=\frac{|\,-10-2-5-1\,|}{\sqrt{4+1+25}}=\frac{18}{\sqrt{30}}=\frac{18\sqrt{30}}{30}=\frac{3\sqrt{30}}{5}$$
   De même, en utilisant cette fois l'équation du plan $\mathscr{R}$:
   $$d(\mathrm{A};\mathscr{R})=\frac{|\,ax_\mathrm{A}+by_\mathrm{A}+cz_\mathrm{A}+d\,|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}=\frac{|\,5-4-7\,|}{\sqrt{1+4}}=\frac{6}{\sqrt{5}}=\frac{6\sqrt{5}}{5}$$
   (d) Bon, comment faire ? Dans ce genre de cas commencons par faire une figure en oubliant pas que $\mathscr{P}$ est orthogonal à $\mathscr{R}$:



La diagonale AQ est la longueur cherchée !

Il suffit donc d'appliquer le théorème de Pythagore et on obtient :

$$d(\text{A};\Delta) = \sqrt{d(\text{A};\mathscr{P})^2 + d(\text{A};\mathscr{R})^2} = \sqrt{\frac{9\times 30 + 36\times 5}{25}} = \frac{\sqrt{270+180}}{5} = \frac{\sqrt{450}}{5} = \frac{5\sqrt{18}}{5} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$$

2. (a) Soit, pour tout nombre réel t, le point M_t de coordonnées $(1+2t\ ;\ 3-t\ ;\ t)$. On a :

$$\text{AM} = \sqrt{(1+2t-5)^2 + (3-t+2)^2 + (t+1)^2} = \sqrt{(2t-4)^2 + (5-t)^2 + (t+1)^2}$$

(b) On a :

$$\varphi(t) = \sqrt{(1+2t-5)^2 + (3-t+2)^2 + (t+1)^2} = \sqrt{(2t-4)^2 + (5-t)^2 + (t+1)^2} = \sqrt{(2t-4)^2 + (5-t)^2 + (t+1)^2}$$

$$\varphi(t) = \sqrt{4t^2 - 16t + 16 + 25 - 10t + t^2 + t^2 + 2t + 1} = \sqrt{6t^2 - 24t + 42} = \sqrt{6(t^2 - 4t + 7)}$$

De plus $\varphi'(t) = \dfrac{6(2t-4)}{2\sqrt{6(t^2-4t+7)}} = \dfrac{6(t-2)}{\sqrt{6(t^2-4t+7)}}$ qui est du signe de $t-2$, ainsi $\varphi' > 0 \iff t > 2$, et on peut conclure que φ est une fonction croissante sur $[2;+\infty[$ et décroissante sur $[0;2]$ qui atteint son minimum pour $x = 2$, et on a :

$$\varphi(2) = \sqrt{6\times 3} = 3\sqrt{2}$$

(c) On constate que le minimum de cette curieuse fonction est précisément égal à la distance entre le point A et la droite Δ. Il est temps d'analyser un peu la situation. Le point $\text{M}_t(1+2t;3-t;t)$ est très précisément un point de la droite Δ (on reconnait les coordonnées du vecteur directeur de Δ et les coordonnées du point C), par conséquent il est bien naturel que les résultats de la question précédente et de la question 1.d coincident...

Antilles-Guyanne Septembre 2009

L'espace est muni d'un repère orthonormal $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$.
On considère les points A(1 ; −1 ; 4), B(7 ; −1 ; −2) et C(1 ; 5 ; −2).

1. (a) On a $\overrightarrow{AB}(6;0;-6)$; $\overrightarrow{AC}(0;6;-6)$ et enfin $\overrightarrow{BC}\,(-6;6;0)$

   (b) $AB = \sqrt{36+36} = \sqrt{72} = AC = BC$ ainsi le triangle ABC est équilatéral.

   (c) $\vec{n}\cdot\overrightarrow{AB} = 6-6 = 0$ tout comme $\vec{n}\cdot\overrightarrow{AC} = 6-6 = 0$.
   Par conséquent $\vec{n}$ est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan (ABC) ce qui montre que $\vec{n} \perp (ABC)$.

   (d) $M(x;y;z) \in (ABC) \Longleftrightarrow \overrightarrow{AM}\cdot\vec{n} = 0 \Longleftrightarrow (x-1)+(y+1)+(z-4) = 0 \Longleftrightarrow x+y+z-4 = 0$

2. Soit $\mathscr{D}$ la droite de représentation paramétrique

$$\left\{\begin{array}{lcl} x &=& -2t \\ y &=& -2t-2 \\ z &=& -2t-3 \end{array}\right. \quad \text{où} \quad t \in \mathbb{R}.$$

   (a) $\mathscr{D}$ est perpendiculaire au plan (ABC) si et seulement si un vecteur directeur de $\mathscr{D}$ est colinéaire à un vecteur normal de (ABC).
   Or, $\mathscr{D}$ est dirigée par $\vec{d}(-2;-2;-2) = -2\vec{n}$. CQFD.

   (b)

$$G \in (ABC)\cap\mathscr{D} \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{lcl} x &=& -2t \\ y &=& -2t-2 \\ z &=& -2t-3 \end{array}\right. \quad \text{où} \quad t \in \mathbb{R}.\text{et} x+y+z-4 = 0$$

   Ainsi $-2t-2t-2-2t-3-4 = 0 \Longleftrightarrow -6t = 9 \Longleftrightarrow t = -\dfrac{3}{2}$ et donc $G(3;3-2;3-3) \Longleftrightarrow G(3;1;0)$.

   (c) Dans un triangle équilatéral le point d'intersection des médiatrices (i.e le centre du cercle circonscrit) est aussi le centre de gravité. Montrons par exemple que GA = GB = GC :

$$GA = \sqrt{(1-3)^2+(-1-1)^2+(4-0)^2} = \sqrt{4+4+16} = \sqrt{24} = 2\sqrt{6}$$

$$GC = \sqrt{(1-3)^2+(5-1)^2+(-2-0)^2} = 2\sqrt{6}$$

$$GB = \sqrt{(7-3)^2+(-1-1)^2+(-2-0)^2} = 2\sqrt{6}$$

   Ainsi GA = GB = GC donc G est le centre de gravité du triangle ABC.

3. Soit $\mathscr{S}$ la sphère de centre G passant par A.

   (a)

$$\mathscr{S} : (x-3)^2+(y-1)^2+z^2 = GA^2 \Longleftrightarrow (x-3)^2+(y-1)^2+z^2 = 24$$

   (b) Si $M(x;y;z) \in \mathscr{D}\cap\mathscr{S}$ alors

$$(-2t-3)^2+(-2t-2-1)^2+(-2t-3)^2 = 24 \Longleftrightarrow 3(-2t-3)^2 = 24 \Longleftrightarrow (-2t-3)^2 = 8 \Longleftrightarrow -2t-3 = \sqrt{8} \quad \text{ou} \quad -2t-3 = -\sqrt{8}$$

   Ainsi :

$$t_1 = \frac{\sqrt{8}+3}{-2} = \frac{-\sqrt{8}-3}{2} \qquad \text{ou} \qquad t_2 = \frac{-\sqrt{8}+3}{-2} = \frac{-3+\sqrt{8}}{2}$$

   En remplaçant t par t_1 dans la représentation paramétrique de $\mathscr{D}$ on trouve les coordonnées de E :

$$E\left(3+2\sqrt{2}\,;\ 1+2\sqrt{2}\,;\ 2\sqrt{2}\right)$$

   et en remplaçant t par t_2 celle de F :

$$F\left(3-2\sqrt{2}\,;\ 1-2\sqrt{2}\,;\ -2\sqrt{2}\right)$$