Proposition 1 :

1. Soit $\mathscr{S}$ la sphère de centre $\Omega(x_0; y_0; z_0)$ et de rayon r, démontrer que $\mathscr{S}$ admet une équation de la forme :

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=r^2$$

2. Déterminer l'équation de la sphère $\mathscr{S}$ de diamètre $[AB]$ avec $A(0;0;1)$ et $B(1;2;3)$. Préciser son centre Ω et son rayon r.

Solutions :

1. $M(x;y;z)\in\mathscr{S} \iff \Omega M^2=r^2 \iff (x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=r^2$.
2. Le centre Ω de cette sphère a pour coordonnées $(0,5;1;2)$. De plus le rayon

$$r=\Omega A=\sqrt{0,5^2+1^2+1^2}=\sqrt{2,25}=\sqrt{\frac{9}{4}}=\frac{3}{2}$$

D'où :

$$\mathscr{S}:(x-0,5)^2+(y-1)^2+(z-2)^2=\frac{9}{4}$$

Exercice 1.

1. Le vecteur $\overrightarrow{AB}(2;-3;-1)$ dirige $\mathscr{D}$, par conséquent :

$$M(x;y;z)\in\mathscr{D} \iff \overrightarrow{AM}=t\overrightarrow{AB}\quad \text{avec}\, t\in\mathbb{R} \iff \begin{cases} x-1=2t \\ y+2=-3t \\ z+1=-t \end{cases} \quad \text{où } t\in\mathbb{R} \iff \begin{cases} x=1+2t \\ y=-2-3t \\ z=-1-t \end{cases} \quad \text{où } t\in\mathbb{R}$$

2. Si $M(x;y;z)\in\mathscr{P}\cap\mathscr{D}$ alors les coordonées de M vérifient les équations de $\mathscr{D}$ et de $\mathscr{P}$, ainsi :

$$2(1+2t)-(-2-3t)-1-t=1 \iff 2+4t+2+3t-1-t=1 \iff 6t=-2 \iff t=-\frac{1}{3}$$

Par conséquent $A\left(1+\frac{2}{3};-2-1;-1-\frac{1}{3}\right) \iff A\left(\frac{5}{3};-3;\frac{-4}{3}\right)$

3. $$d(A;\mathscr{P})=\frac{|\,ax_A+by_A+cz_A+d\,|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}=\frac{|\,\frac{10}{3}+3-\frac{4}{3}\,|}{\sqrt{4+1+1}}=\frac{|\,\frac{10}{3}+3-\frac{4}{3}\,|}{\sqrt{4+1+1}}=\frac{5}{\sqrt{6}}=\frac{5\sqrt{6}}{6}$$

Proposition 2 :

Soit A le point de coordonnées $(x_a; y_a; z_a)$ et $\mathscr{P}$ le plan d'équation $ax + by + cz + d = 0$ où a, b et c sont des réels qui ne sont pas tous nuls.

1. Donner les coordonnées d'un vecteur normal $\vec{n}$ au plan $\mathscr{P}$.
2. On note $\mathrm{H}(x_{\mathrm{H}}; y_{\mathrm{H}}; z_{\mathrm{H}})$ le projeté orthogonal de A sur $\mathscr{P}$ déterminer de deux manières différentes $\overrightarrow{\mathrm{AH}} \cdot \vec{n}$. [a]
3. Montrer finalement que :

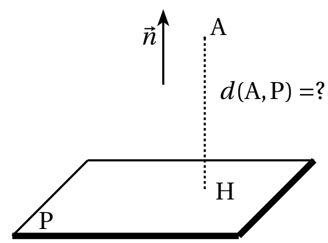
$$d(\mathrm{A}; \mathscr{P}) = \frac{|\, ax_{\mathrm{A}} + by_{\mathrm{A}} + cz_{\mathrm{A}} + d \,|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

a. On utilisera la définition dans un premier temps, puis la formule faisant intervenir le cosinus

Solutions :

1. $\vec{n}(a; b; c)$ est normal à $\mathscr{P}$.

2. Notons $\mathrm{H}(x_{\mathrm{H}}; y_{\mathrm{H}}; z_{\mathrm{H}})$ le projeté orthogonal de A sur P.
   Nous savons que le vecteur $\vec{n}(a; b; c)$ est normal à P.
   Donc les vecteurs $\vec{n}$ et $\overrightarrow{\mathrm{AH}}$ sont colinéaires.
   Il existe un réel t tel que :



$$\overrightarrow{\mathrm{AH}} = t\vec{n}$$

   Par conséquent

$$\overrightarrow{\mathrm{AH}} \cdot \vec{n} = \pm \mathrm{AH} \times ||\vec{n}||$$

   Mais encore, (notons que $\mathrm{H} \in \mathrm{P} \Longrightarrow ax_{\mathrm{H}} + by_{\mathrm{H}} + cz_{\mathrm{H}} + d = 0$)

$$\overrightarrow{\mathrm{AH}} \cdot \vec{n} = a(x_{\mathrm{H}} - x_{\mathrm{A}}) + b(y_{\mathrm{H}}) - y_{\mathrm{A}}) + c(z_{\mathrm{H}} - z_{\mathrm{A}}) = -(ax_{\mathrm{A}} + by_{\mathrm{A}} + cz_{\mathrm{A}} + d)$$

3. Au final :

$$\mathrm{AH} \times ||\vec{n}|| = \left|ax_{\mathrm{A}} + by_{\mathrm{A}} + cz_{\mathrm{A}} + d\right| \Longleftrightarrow \mathrm{AH} = \frac{\left|ax_{\mathrm{A}} + by_{\mathrm{A}} + cz_{\mathrm{A}} + d\right|}{||\vec{n}||} = \frac{\left|ax_{\mathrm{A}} + by_{\mathrm{A}} + cz_{\mathrm{A}} + d\right|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

Exercice 2.

1. Comme $\mathscr{P}$ est orthogonal à (BC), $\overrightarrow{\mathrm{BC}}(-1; 1; 0)$ est normal à $\mathscr{P}$, ainsi :

   $\mathrm{M}(x; y; z) \in \mathscr{P} \Longleftrightarrow \overrightarrow{\mathrm{AM}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{BC}} = 0 \Longleftrightarrow -(x-1)+1\times(y-2)+0\times(z-0) = 0 \Longleftrightarrow -x+1+y-2 = 0 \Longleftrightarrow -x+y-1 = 0 \Longleftrightarrow x-y+1 = 0$

2. $\mathrm{M}(x; y; z) \in \mathscr{S} \Longleftrightarrow \mathrm{BM}^2 = r^2 \Longleftrightarrow (x-2)^2 + (y-2)^2 + z^2 = 4$
3. Calculons la distance du plan P au point B, centre de la sphère $\mathscr{S}$:

$$d(\mathrm{B}; \mathscr{P}) = \frac{\left|ax_{\mathrm{B}} + by_{\mathrm{B}} + cz_{\mathrm{B}} + d\right|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} = \frac{|2 - 2 + 0 + 1|}{\sqrt{1 + 1 + 1}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3} < 2$$

   Par conséquent $\mathscr{P}$ coupe $\mathscr{S}$.