Proposition 1 :

Prérequis : On rappelle que deux événements A et B sont indépendants pour la probabilité p si et seulement si :

$$p(\mathrm{A} \cap \mathrm{B}) = p(\mathrm{A}) \times p(\mathrm{B})$$

Soient A et B deux événements associés à une expérience aléatoire

1. Démontrer que $p(\mathrm{B}) = p(\mathrm{B} \cap \mathrm{A}) + p\left(\mathrm{B} \cap \overline{\mathrm{A}}\right)$.
2. Démontrer que, si les événements A et B sont indépendants pour la probabilité p, alors les événements $\overline{\mathrm{A}}$ et B le sont également.

Preuve

1. On a $\mathrm{B} = (\mathrm{B} \cap \mathrm{A}) \cup (\mathrm{B} \cap \overline{\mathrm{A}})$, et il s'agit d'une réunion disjointe, par conséquent :

$$\mathrm{P}(\mathrm{B}) = \mathrm{P}(\mathrm{B} \cap \mathrm{A}) + \mathrm{P}(\mathrm{B} \cap \overline{\mathrm{A}})$$

2. Comme A et B sont indépendants alors

$$\mathrm{P}(\mathrm{A} \cap \mathrm{B}) = \mathrm{P}(\mathrm{A})\mathrm{P}(\mathrm{B})$$

Par conséquent, en utilisant 1.

$$\mathrm{P}(\overline{\mathrm{A}} \cap \mathrm{B}) = \mathrm{P}(\mathrm{B}) - \mathrm{P}(\mathrm{A} \cap \mathrm{B}) = \mathrm{P}(\mathrm{B}) - \mathrm{P}(\mathrm{A})\mathrm{P}(\mathrm{B}) = \mathrm{P}(\mathrm{B})(1 - \mathrm{P}(\mathrm{A})) = \mathrm{P}(\mathrm{B})\mathrm{P}(\overline{\mathrm{A}})$$

Exercice 1. *Efficacité d'un vaccin* (6 points)

Dans un lycée de 1000 élèves, 250 se sont fait vacciner contre la grippe au début de l'année scolaire 2009 – 2010. Une épidémie de grippe a affecté la population scolaire au cours de l'hivers, et 10% des élèves ont contracté la maladie. Enfin, 4% des élèves vaccinés ont eu la grippe.
On choisit au hasard l'un des élèves de ce lycée, tous les élèves ayant la même probabilité d'être choisis.
On note M : « l'élève choisit a contracté la maladie ».
V : « l'élève choisit a été vacciné ».

Toutes les réponses seront données sous forme de fractions irréductibles. On pourra s'aider d'un arbre de probabilité.

1.

$$\mathrm{P}(\mathrm{V}) = \frac{250}{1000} = \frac{1}{4}$$

$$\mathrm{P}(\mathrm{M}) = \frac{10}{100} = \frac{1}{10}$$

$$\mathrm{P}_{\mathrm{V}}(\mathrm{M}) = \frac{4}{100}$$

2.

$$\mathrm{P}(\mathrm{M} \cap \mathrm{V}) = \mathrm{P}(\mathrm{V}) \times \mathrm{P}_{\mathrm{V}}(\mathrm{M}) = \frac{1}{4} \times \frac{4}{100} = \frac{1}{100}$$

De plus :

$$\mathrm{P}(\mathrm{M} \cap \mathrm{V}) + \mathrm{P}(\mathrm{M} \cap \overline{\mathrm{V}}) = \mathrm{P}(\mathrm{M}) \Longleftrightarrow \mathrm{P}(\mathrm{M} \cap \overline{\mathrm{V}}) = \mathrm{P}(\mathrm{M}) - \mathrm{P}(\mathrm{M} \cap \mathrm{V}) = \frac{1}{10} - \frac{1}{100} = \frac{9}{100}$$

3.

$$\mathrm{P}_{\overline{\mathrm{V}}}(\mathrm{M}) = \frac{\mathrm{P}(\mathrm{M} \cap \overline{\mathrm{V}})}{\mathrm{P}(\overline{\mathrm{V}})} = \frac{\frac{9}{100}}{\frac{3}{4}} = \frac{3}{25} = \frac{9}{100}$$

Comme $\mathrm{P}_{\overline{\mathrm{V}}}(\mathrm{M}) > \mathrm{P}_{\mathrm{V}}(\mathrm{M})$, le vaccin a été efficace pour les élèves du lycée.

Proposition 2 :

On rappelle que si n et p sont deux nombres entiers naturels tels que $p \leqslant n$ alors $\binom{n}{p} = \dfrac{n!}{p!(n-p)!}$.

Démontrer que pour tout nombre entier naturel n et pour tout nombre entier naturel p tels que $1 \leqslant p \leqslant n$ on a :

$$\binom{n}{p} = \binom{n-1}{p-1} + \binom{n-1}{p}$$

Preuve

$$\binom{n-1}{p-1} + \binom{n-1}{p} = \frac{(n-1)!}{(p-1)!(n-p)!} + \frac{(n-1)!}{p!(n-1-p)!} = \frac{(n-1)!p + (n-1)!(n-p)}{p!(n-p)!} = \frac{(n-1)![p+n-p]}{p!(n-p)!} = \frac{n!}{p!(n-p)!} = \binom{n}{p}$$

Exercice 2. (6 points)

Pour chacune des questions suivantes, ***une ou deux des réponses*** *proposées sont correctes. Deux points sont attribués à chacune des questions. Toute réponse inexacte est pénalisée de 0,5 point. Il n'y a pas de pénalité en cas d'absence de réponse. Aucune justification n'est attendue. Si le total des points obtenus est négatif, le note attribuée à l'exercice est 0.*

Recopier le numéro de la question et la ou les réponses correctes (deux au maximum).

1. On tire au hasard une carte d'un jeu de 32 cartes. Notons p_1 la probabilité cherchée.
   Il y a 8 piques plus trois as non pique donc 11 cartes qui sont soit des piques soit des as, d'où
   $$p_1 = 1 - \frac{11}{32} = \frac{21}{32}$$
   La seule réponse correcte est donc la réponse C.
2. On tire au hasard et simultanément deux cartes d'un jeu de 32 cartes. Notons p_2 cette probabilité, on a alors : $p_2 = \dfrac{21}{32} \times \dfrac{20}{31} = \dfrac{105}{248}$.
   De plus $\dfrac{\binom{21}{2}}{\binom{32}{2}} = \dfrac{105}{248}$, donc il y a deux réponses correctes, A et B.
3. On désigne par A et B deux événements indépendants d'un univers muni d'une loi de probabilité p. On sait que $p(\text{A}\cup\text{B}) = \dfrac{4}{5}$ et $p\left(\overline{\text{A}}\right) = \dfrac{3}{5}$. $p(\text{A}\cup\text{B}) = p(\text{A}) + p(\text{B}) - p(\text{A}\cap\text{B})$, comme A et B sont indépendants on a : $p(\text{A}\cap\text{B}) = p(\text{A})p(\text{B})$ et $p(\text{A}) = 1 - p(\overline{\text{A}}) = \dfrac{2}{5}$, d'où :
   $$\frac{4}{5} = \frac{2}{5} + p(\text{B}) - \frac{2}{5}p(\text{B}) \Longleftrightarrow \frac{2}{5} = \frac{3}{5}p(\text{B}) \Longleftrightarrow p(\text{B}) = \frac{2}{3}$$
   réponse B donc.