Exercice 1. R.O.C (6 points)

Partie A

Démontrer la formule d'intégration par parties en utilisant la formule de dérivation d'un produit de deux fonctions dérivables, à dérivées continues sur un intervalle $[a\ ;\ b]$.

Partie B : Application

Soient les deux intégrales définies par

$$\mathrm{I} = \int_0^{\pi} e^x \sin x \, \mathrm{d}x \qquad \text{et} \qquad \mathrm{J} = \int_0^{\pi} e^x \cos x \, \mathrm{d}x.$$

1. En utilisant l'intégration par parties de deux manières différentes, démontrer que $\mathrm{I} = -\mathrm{J}$ puis que $\mathrm{I} = \mathrm{J} + e^{\pi} + 1$.
2. En déduire les valeurs exactes de I et de J.

Preuve

Partie A

Soient u et v deux fonctions dérivables sur $[a\ ;\ b]$ et dont les dérivées sont continues. Alors uv est dérivable et $(uv)' = u'v + uv'$.

Par conséquent, $u'v = (uv)' - uv'$ et ce sont des fonctions continues d'où $\int_a^b u'(x)v(x)\ \mathrm{d}x = \int_a^b [(uv)'(x) - u(x)v'(x)]\ \mathrm{d}x = \int_a^b (uv)'(x)\ \mathrm{d}x - \int_a^b u(x)v'(x)\ \mathrm{d}x$ (linéarité de l'intégrale) $= [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u(x)v'(x)\ \mathrm{d}x = u(b)v(b) - u(a)v(a) - \int_a^b u(x)v'(x)\ \mathrm{d}x$.

Partie B

Première méthode : on pose $u'(x) = \mathrm{e}^x$ d'où $u(x) = \mathrm{e}^x$ et $v(x) = \sin x$ d'où $v'(x) = \cos x$.

u et v sont dérivables et leurs dérivées sont continues. On effectue une intégration par parties :

$\mathrm{I} = \left[\mathrm{e}^x \sin x\right]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} \mathrm{e}^x \cos x\ \mathrm{d}x = -\mathrm{J}$ donc $\mathrm{I} = -\mathrm{J}$.

Deuxième méthode :

on pose $u(x) = \mathrm{e}^x$ donc $u'(x) = \mathrm{e}^x$ et $w'(x) = \sin x$ d'où $w(x) = -\cos x$.

u' et w' sont continues. On intègre par parties :

$\mathrm{I} = \left[-\mathrm{e}^x \cos x\right]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} -\mathrm{e}^x \cos x\ \mathrm{d}x = 1 + \mathrm{e}^{\pi} + \mathrm{J}$ donc $\mathrm{I} = 1 + \mathrm{e}^{\pi} + \mathrm{J}$.

On obtient le système :

$$\begin{cases} \mathrm{I} = -\mathrm{J} \\ \mathrm{I} = 1 + \mathrm{e}^{\pi} + \mathrm{J} \end{cases}.$$

On obtient : $\mathrm{I} = \dfrac{1}{2}\left(1 + \mathrm{e}^{\pi}\right)$ et $\mathrm{J} = -\dfrac{1}{2}\left(1 + \mathrm{e}^{\pi}\right)$

Exercice 2. (4 points)

Soit f et g deux fonctions définies, pour tout $x \in \mathbb{R}$ par :

$$f(x) = -x^2 + 2 \qquad \text{et} \qquad g(x) = x^2 - 2x - 2$$

On note $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ les courbes représentant respectivement f et g dans un repère $(\mathrm{O}; \vec{i}, \vec{j})$ orthonormé du plan d'unité 3 cm.

1. On souhaite donc démontrer que $f(x) \geq g(x)$ pour tout $x \in [-1; 2]$. Or,

$$f(x) - g(x) = -x^2 + 2 - x^2 + 2x + 2 = -2x^2 + 2x + 4 = 2(-x^2 + x + 2)$$

On étudie alors le signe de $-x^2 + x + 2$ polynôme dont le discriminant vaut :

$$\Delta = 1 + 8 = 9$$

et dont les racines valent par conséquent $x_1 = \dfrac{-1+3}{-2} = -1$ et $x_2 = \dfrac{-1-3}{-2} = 2$.

Ainsi l'expression $-x^2 + x + 2$ est positive pour tout x compris entre x_1 et x_2, on en déduit :

$$f(x) - g(x) \geq 0 \Longleftrightarrow f(x) \geq g(x) \quad \forall x \in [-1; 2]$$

2. L'aire $\mathscr{A}$ (en u.a) vaut :

$$\mathscr{A} = \int_{-1}^{2} f(x) - g(x)dx = \left[-\frac{2}{3}x^3 + x^2 + 4x\right]_{-1}^{2} = -\frac{16}{3} + 4 + 8 - \frac{2}{3} - 1 + 4 = -6 + 15 = 9 \quad \text{u.a}$$

Et donc en cm^2 on obtient

$$\mathscr{A} = 9 \times 3 = 81 \quad \text{cm}^2$$

Proposition 1 :

On supposera connus les résultats suivants :
Soient u et v deux fonctions continues sur un intervalle $[a\,;\,b]$ avec $a < b$.

- Si $u \geqslant 0$ sur $[a\,;\,b]$ alors $\displaystyle\int_a^b u(x)\,\mathrm{d}x \geqslant 0$.
- Pour tous réels α et β, $\displaystyle\int_a^b [\alpha u(x) + \beta v(x)]\,\mathrm{d}x = \alpha\int_a^b u(x)\,\mathrm{d}x + \beta\int_a^b v(x)\,\mathrm{d}x$.

Démontrer que si f et g sont deux fonctions continues sur un intervalle $[a\,;\,b]$ avec $a < b$ et si, pour tout x de $[a\,;\,b]$, $f(x) \leqslant g(x)$ alors $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$.

Preuve

f et g sont deux fonctions continues sur un intervalle $[a\,;\,b]$ donc $g - f$ est continue sur $[a\,;\,b]$ Pour tout x de $[a\,;\,b]$, $f(x) \leqslant g(x)$ donc $g(x) - f(x) \geqslant 0$ donc $\displaystyle\int_a^b [g(x) - f(x)]\,\mathrm{d}x \geqslant 0$

$\displaystyle\int_a^b [g(x) - f(x)]\,\mathrm{d}x = \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x - \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ et $\displaystyle\int_a^b [g(x) - f(x)]\,\mathrm{d}x \geqslant 0$ donc $\displaystyle\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x - \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \geqslant 0$ soit $\displaystyle\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x \geqslant \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

Exercice 2. (6 points)

1. Soit f la fonction définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par :
$$f(x) = \frac{1 - x^2}{(1 + x^2)^2}$$
   (a)
$$\mathrm{F}'(x) = \frac{1(1 + x^2) - x \times 2x}{(1 + x^2)^2} = \frac{1 + x^2 - 2x^2}{(1 + x^2)^2} = f(x)$$
   Ainsi F est une primitive de f.

   (b) En déduire :
$$\int_0^1 \frac{1 - x^2}{(1 + x^2)^2}\,dx = \mathrm{F}(1) - \mathrm{F}(0) = \frac{1}{2} - 0 = \frac{1}{2}$$

2. (a)
$$\mathrm{F}(x) = \int_{\frac{\pi}{2}}^{x} t\sin t\,dt = [-t\cos t]_{\frac{\pi}{2}}^{x} + \int_{\frac{\pi}{2}}^{x} \cos t\,dt = -x\cos x + [\sin t]_{\frac{\pi}{2}}^{x} = -x\cos x + x\sin x - 1$$
   Par conséquent, pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a :
$$\mathrm{F}(x) = -x\cos x + x\sin x - 1$$
   (b) D'après le cours (théorème fondamental du calcul intégral) la primitive de la fonction $x \longmapsto x\sin x$ s'annulant en $\dfrac{\pi}{2}$ est la fonction F définie par :
$$\mathrm{F}(x) = \int_{\frac{\pi}{2}}^{x} t\sin t\,dt$$
   donc ici :
$$\mathrm{F}(x) = -x\cos x + x\sin x - 1$$

3. Montrons que $f(x) \geq g(x)$, pour cela étudions le signe de la différence :
$$f(x) - g(x) = x - x^2 = x(1 - x)$$
   $x(1 - x) \geq 0$ puisque $x \in [0; 1]$, par conséquent $f(x) \geq g(x)$ et donc :
$$\mathscr{A} = \int_0^1 f(x) - g(x)\,dx = \int_0^1 x - x^2\,dx = \left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{3 - 2}{6} = \frac{1}{6}$$