Correction de l'interrogation n°14

Exercice 1. R.O.C (6 points)

Partie A

Démontrer la formule d'intégration par parties en utilisant la formule de dérivation d'un produit de deux fonctions dérivables, à dérivées continues sur un intervalle $[a\,;\,b]$.

Partie B : Application

Soient les deux intégrales définies par

$$\mathrm{I} = \int_0^{\pi} e^x \sin x \, \mathrm{d}x \qquad \text{et} \qquad \mathrm{J} = \int_0^{\pi} e^x \cos x \, \mathrm{d}x.$$

1. En utilisant l'intégration par parties de deux manières différentes, démontrer que $\mathrm{I} = -\mathrm{J}$ puis que $\mathrm{I} = \mathrm{J} + e^{\pi} + 1$.
2. En déduire les valeurs exactes de I et de J.

Preuve

Partie A

Soient u et v deux fonctions dérivables sur $[a\,;\,b]$ et dont les dérivées sont continues. Alors uv est dérivable et $(uv)' = u'v + uv'$.

Par conséquent, $u'v = (uv)' - uv'$ et ce sont des fonctions continues d'où $\displaystyle\int_a^b u'(x)v(x)\ \mathrm{d}x = \int_a^b [(uv)'(x) - u(x)v'(x)]\ \mathrm{d}x = \int_a^b (uv)'(x)\ \mathrm{d}x - \int_a^b u(x)v'(x)\ \mathrm{d}x$ (linéarité de l'intégrale) $= [u(x)v(x)]_a^b - \displaystyle\int_a^b u(x)v'(x)\ \mathrm{d}x = u(b)v(b) - u(a)v(a) - \int_a^b u(x)v'(x)\ \mathrm{d}x$.

Partie B

Première méthode : on pose $u'(x) = \mathrm{e}^x$ d'où $u(x) = \mathrm{e}^x$ et $v(x) = \sin x$ d'où $v'(x) = \cos x$.
u et v sont dérivables et leurs dérivées sont continues. On effectue une intégration par parties :
$\mathrm{I} = \left[\mathrm{e}^x \sin x\right]_0^{\pi} - \displaystyle\int_0^{\pi} \mathrm{e}^x \cos x\ \mathrm{d}x = -\mathrm{J}$ donc $\mathrm{I} = -\mathrm{J}$.

Deuxième méthode :
on pose $u(x) = \mathrm{e}^x$ donc $u'(x) = \mathrm{e}^x$ et $w'(x) = \sin x$ d'où $w(x) = -\cos x$.
u' et w' sont continues. On intègre par parties :
$\mathrm{I} = \left[-\mathrm{e}^x \cos x\right]_0^{\pi} - \displaystyle\int_0^{\pi} -\mathrm{e}^x \cos x\ \mathrm{d}x = 1 + \mathrm{e}^{\pi} + \mathrm{J}$ donc $\mathrm{I} = 1 + \mathrm{e}^{\pi} + \mathrm{J}$.

On obtient le système :

$$\begin{cases} \mathrm{I} = -\mathrm{J} \\ \mathrm{I} = 1 + \mathrm{e}^{\pi} + \mathrm{J} \end{cases}.$$

On obtient : $\mathrm{I} = \dfrac{1}{2}\left(1 + \mathrm{e}^{\pi}\right)$ et $\mathrm{J} = -\dfrac{1}{2}\left(1 + \mathrm{e}^{\pi}\right)$

Exercice 2.

1. Déterminer une primitive F pour chacune des fonctions f définies sur I par :
   (a) $f(x) = e^x - x^2$ sur $\mathrm{I} = \mathbb{R}$ alors $\mathrm{F}(x) = e^x - \dfrac{x^3}{3}$
   (b) $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$ sur $\mathrm{I} = \mathbb{R}^{+*}$ alors f est de la forme $u'u$, par conséquent F est de la forme $\dfrac{u^2}{2}$ et donc :
   $$\mathrm{F}(x) = \frac{\ln^2 x}{2}$$
2. Par conséquent :
$$\int_0^1 e^x - x^2 dx = \left[e^x - \frac{x^3}{3}\right]_0^1 = e - \frac{1}{3} - e^0 = e - \frac{4}{3} \qquad \text{et} \qquad \int_1^e \frac{\ln x}{x} dx = \left[\frac{\ln^2 x}{2}\right]_1^e = \frac{\ln^2 e}{2} - 0 = \frac{1}{2}$$

Proposition 1 :

On supposera connus les résultats suivants :
Soient u et v deux fonctions continues sur un intervalle $[a\,;\,b]$ avec $a < b$.

- Si $u \geqslant 0$ sur $[a\,;\,b]$ alors $\displaystyle\int_a^b u(x)\,\mathrm{d}x \geqslant 0$.
- Pour tous réels α et β, $\displaystyle\int_a^b [\alpha u(x) + \beta v(x)]\,\mathrm{d}x = \alpha\int_a^b u(x)\,\mathrm{d}x + \beta\int_a^b v(x)\,\mathrm{d}x$.

Démontrer que si f et g sont deux fonctions continues sur un intervalle $[a\,;\,b]$ avec $a < b$ et si, pour tout x de $[a\,;\,b]$, $f(x) \leqslant g(x)$ alors $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$.

Preuve

f et g sont deux fonctions continues sur un intervalle $[a\,;\,b]$ donc $g - f$ est continue sur $[a\,;\,b]$ Pour tout x de $[a\,;\,b]$, $f(x) \leqslant g(x)$ donc $g(x) - f(x) \geqslant 0$ donc $\displaystyle\int_a^b [g(x) - f(x)]\,\mathrm{d}x \geqslant 0$
$\displaystyle\int_a^b [g(x) - f(x)]\,\mathrm{d}x = \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x - \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ et $\displaystyle\int_a^b [g(x) - f(x)]\,\mathrm{d}x \geqslant 0$ donc $\displaystyle\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x - \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \geqslant 0$ soit $\displaystyle\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x \geqslant \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

Exercice 2. (7 points)

1. Déterminer une primitive F pour chacune des fonctions f définies sur I par :
   (a) $f(x) = e^x - x$ sur $\mathrm{I} = \mathbb{R}$ alors $\mathrm{F}(x) = e^x - \dfrac{x^2}{2}$
   (b) $f(x) = (1+x)^2$ sur $\mathrm{I} = \mathbb{R}$ alors f est de la forme $u'u^2$, par conséquent F est de la forme $\dfrac{u^3}{3}$ et donc :
   $$\mathrm{F}(x) = \frac{(1+x)^3}{3}$$
2. En déduire :
   $$\int_0^1 e^x - x dx = \left[e^x - \frac{x^2}{2}\right]_0^1 = e - \frac{1}{2} - e^0 = e - \frac{3}{2} \qquad \text{et} \qquad \int_1^e (1+x)^2 dx = \left[\frac{(1+x)^3}{3}\right]_1^e = \frac{(1+e)^3}{3} - \frac{8}{3}$$
3. On note $g(x) = e^x$ et $h(x) = x$. Déduire de la précédente question l'aire du domaine délimité par les courbes des fonctions g et h et par les droites d'équations $x = 0$ et $x = 1$.
   Sur $[0;1]$ les fonctions g et h sont strictement croissantes, par conséquent pour tout $x \in [0;1]$ on a :
   $$g(x) \geq e^0 = 1 \quad \text{et} \quad h(x) \leq 1 \Longrightarrow g(x) \geq h(x)$$
   Ainsi l'aire cherché vaut
   $$\int_0^1 e^x - x dx = e - \frac{3}{2} \quad \text{u.a}$$
4. On a :
   $$\mathrm{J} = [te^t]_0^3 - \int_0^3 e^t dt = 3e^3 - [e^t]_0^3 = 3e^3 - e^3 + 1 = 2e^3 + 1$$
   $$\mathrm{I} = \int_1^e \ln x dx = [t \ln t]_1^e - \int_1^e t \times \frac{1}{t} dt = e \ln e - \ln 1 - \int_1^e 1 dt = e - (e-1) = 1$$