Proposition 1 :

Soit a et b deux réels tels que $a < b$ et f et g deux fonctions continues sur l'intervalle $[a\,;\,b]$. On suppose connus les résultats suivants :

- $\displaystyle\int_a^b [f(t)+g(t)]\,\mathrm{d}t = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t + \int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$.
- Si pour tout $t \in [a\,;\,b]$, $f(t) \geqslant 0$ alors $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \geqslant 0$.

Montrer que : si pour tout $t \in [a\,;\,b]$, $f(t) \leqslant g(t)$ alors $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$.

Preuve

f et g sont deux fonctions continues sur un intervalle $[a\,;\,b]$ donc $g-f$ est continue sur $[a\,;\,b]$ Pour tout x de $[a\,;\,b]$, $f(x) \leqslant g(x)$ donc $g(x)-f(x) \geqslant 0$ donc $\displaystyle\int_a^b [g(x)-f(x)]\,\mathrm{d}x \geqslant 0$

$\displaystyle\int_a^b [g(x)-f(x)]\,\mathrm{d}x = \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x - \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ et $\displaystyle\int_a^b [g(x)-f(x)]\,\mathrm{d}x \geqslant 0$ donc $\displaystyle\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x - \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \geqslant 0$ soit $\displaystyle\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x \geqslant \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

Exercice 1. (6 points)

1.
$$f(x) = \sqrt{x} - \ln x.$$

(a) La fonction est une différence de fonctions dérivables sur $]0\,;\,+\infty[$, elle est donc dérivable et $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}} - \dfrac{1}{x} = \dfrac{\sqrt{x}-2}{2x}$ qui est du signe du numérateur puisque $x > 0$.
$f'(x) = 0 \iff \sqrt{x} = 2 \iff x = 4$;
$f'(x) < 0 \iff 0 < x < 4$; f est décroissante sur cet intervalle
$f'(x) > 0 \iff x > 4$; f est croissante sur cet intervalle.
Il en résulte que f a un minimum pour $x = 4$ et $f(4) = \sqrt{4} - \ln 4 2 - 2\ln 2 \approx 0,62$.

(b) Le minimum de f étant supérieur à zéro, $f(x) > 0$ quel que soit $x \in]0\,;\,+\infty[$.
Donc $f(x) > 0 \iff \sqrt{x} - \ln x \iff \sqrt{x} > \ln x \iff \dfrac{\sqrt{x}}{x} > \dfrac{\ln x}{x} \iff \dfrac{\ln x}{x} < \dfrac{\sqrt{x}}{x}$, car $x > 0$.

(c) Comme $\dfrac{\sqrt{x}}{x} = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ et que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \dfrac{1}{\sqrt{x}} = 0$, on obtient par application du théorème des « gendarmes » que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$.

2.
$$f_n(x) = \frac{\ln x}{x^{\frac{1}{n}}}.$$

On peut écrire $f_n(x) = \dfrac{\ln x}{x^{\frac{1}{n}}} = \dfrac{\ln x^{n\times\frac{1}{n}}}{x^{\frac{1}{n}}} = \dfrac{\ln\left(x^{\frac{1}{n}}\right)^n}{x^{\frac{1}{n}}} = n\dfrac{\ln\left(x^{\frac{1}{n}}\right)}{x^{\frac{1}{n}}}$.
En posant $\mathrm{X} = x^{\frac{1}{n}}$, $f_n(x) = n\dfrac{\ln \mathrm{X}}{\mathrm{X}}$.
Or $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \mathrm{X} = +\infty$ et par composition, $\displaystyle\lim_{\mathrm{X}\to+\infty} \dfrac{\ln \mathrm{X}}{\mathrm{X}} = 0$
(d'après la question précédente) $\Rightarrow \displaystyle\lim_{x\to+\infty} f_n(x) = 0$.

Proposition 2 :

On supposera connus les résultats suivants :
Soient u et v deux fonctions continues sur un intervalle $[a\,;\,b]$ avec $a<b$.

- Si $u \geqslant 0$ sur $[a\,;\,b]$ alors $\displaystyle\int_a^b u(x)\,\mathrm{d}x \geqslant 0$.
- Pour tous réels α et β, $\displaystyle\int_a^b [\alpha u(x)+\beta v(x)]\,\mathrm{d}x = \alpha\int_a^b u(x)\,\mathrm{d}x + \beta\int_a^b v(x)\,\mathrm{d}x$.

Démontrer que si f et g sont deux fonctions continues sur un intervalle $[a\,;\,b]$ avec $a<b$ et si, pour tout x de $[a\,;\,b]$, $f(x) \leqslant g(x)$ alors $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$.

Preuve

f et g sont deux fonctions continues sur un intervalle $[a\,;\,b]$ donc $g-f$ est continue sur $[a\,;\,b]$ Pour tout x de $[a\,;\,b]$, $f(x) \leqslant g(x)$ donc $g(x)-f(x) \geqslant 0$ donc $\displaystyle\int_a^b [g(x)-f(x)]\,\mathrm{d}x \geqslant 0$

$\displaystyle\int_a^b [g(x)-f(x)]\,\mathrm{d}x = \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x - \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ et $\displaystyle\int_a^b [g(x)-f(x)]\,\mathrm{d}x \geqslant 0$ donc $\displaystyle\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x - \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \geqslant 0$ soit $\displaystyle\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x \geqslant \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

Exercice 1. (6 points)

On considère l'équation notée (E) : $\ln x = -x$.

1. (a) f est une somme de fonctions dérivables sur $]0\,;\,+\infty[$: elle est donc dérivable sur $]0\,;\,+\infty[$ et $f'(x) = 1+\dfrac{1}{x} \geqslant 1 > 0$.
   La fonction f est donc croissante sur $]0\,;\,+\infty[$.

   (b) On a :
   - $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$;
   - $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

   Comme la fonction f est croissante sur $]0\,;\,+\infty[$ il existe un réel unique $\alpha > 0$ tel que $f(\alpha) = 0$.

   (c) $f\left(\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{1}{2} + \ln\left(\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{1}{2} - \ln 2 < 0$.
   $f(1) = 1+\ln 1 = 1+0 = 1 > 0$.
   On a : $f\left(\dfrac{1}{2}\right) < 0$, $f(1) > 0$ et f croissante sur $\left[\dfrac{1}{2}\,;\,1\right]$, donc
   $\dfrac{1}{2} \leqslant \alpha \leqslant 1$.

2. (a) g est une différence de fonctions dérivables sur $]0\,;\,+\infty[$; elle est donc dérivable et $f'(x) = \dfrac{1}{5}\left(4-\dfrac{1}{x}\right) = \dfrac{1}{5}\dfrac{4x-1}{x}$
   qui est du signe de $4x-1$, donc négative sur $\left]0\,;\,\dfrac{1}{4}\right]$ et positive sur $\left[\dfrac{1}{4}\,;\,+\infty\right[$.
   g est donc décroissante sur $\left]0\,;\,\dfrac{1}{4}\right]$, puis croissante.

   (b) Sur l'intervalle $\left[\dfrac{1}{2}\,;\,1\right]$, on vient de voir que g est croissante. Donc :
   $\dfrac{1}{2} \leqslant x \leqslant 1 \Rightarrow g\left(\dfrac{1}{2}\right) \leqslant g(x) \leqslant g(1)$.
   Or $g\left(\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{2-\ln\frac{1}{2}}{5} = \dfrac{2+\ln 2}{5} \approx 0{,}53 > 0{,}5$ et $g(1) = \dfrac{4-\ln 1}{5} = \dfrac{4}{5} < 1$.
   Conclusion : $\dfrac{1}{2} \leqslant x \leqslant 1 \Rightarrow \dfrac{1}{2} \leqslant g(x) \leqslant 1$.

   (c) On a (E) $\;: g(x) = x \iff \dfrac{4x-\ln x}{5} = x \iff 4x-\ln x = 5x \iff x+\ln x = 0 \iff f(x) = 0$.