Proposition 1 :

Prérequis : On rappelle que pour tout $a > 0$ et pour tout $b > 0$ on a :

$$\ln(ab) = \ln(a) + \ln(b).$$

Utiliser le résultat précédent pour démontrer que

$$\ln\left(\frac{1}{b}\right) = -\ln(b) \qquad \text{et que} \qquad \ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln(a) - \ln(b)$$

Preuve

On a donc :

$$0 = \ln 1 = \ln\left(\frac{b}{b}\right) = \ln\left(b \times \frac{1}{b}\right) = \ln b + \ln\left(\frac{1}{b}\right) \Longleftrightarrow \ln\left(\frac{1}{b}\right) = -\ln(b)$$

Puis :

$$\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln\left(a \times \frac{1}{b}\right) = \ln a + \ln\left(\frac{1}{b}\right) = \ln a - \ln b$$

Exercice 1. (6 points)

On considère la fonction f définie par :

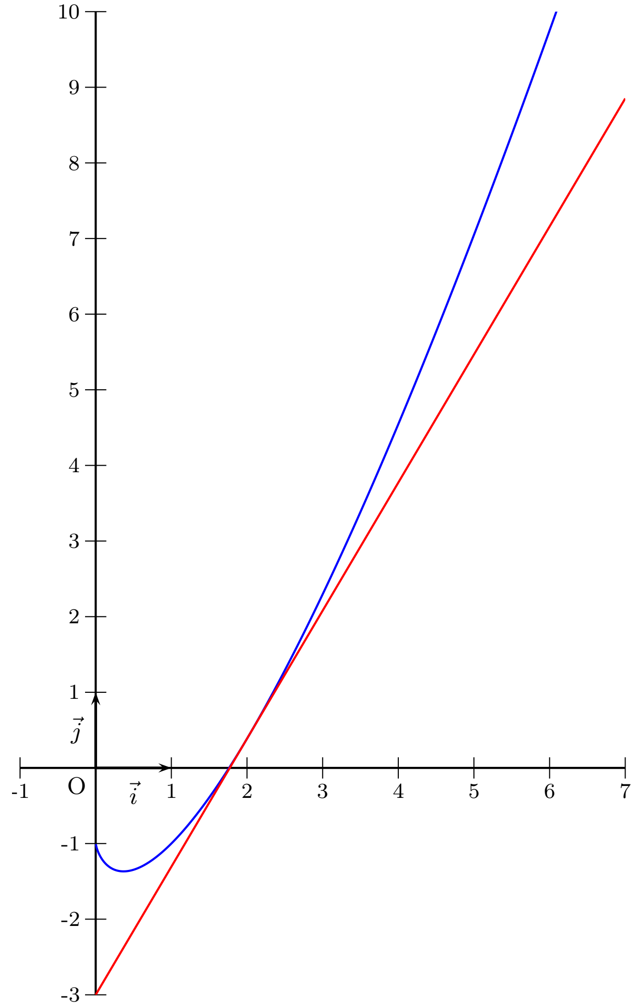
$$f(x) = x\ln x - 1$$

On note $\mathscr{C}_f$ sa représentation graphique dans le repère $(O; \vec{u}, \vec{v})$.

1. f est définie pour $x > 0$ donc $D_f =]0; +\infty[$
2. On sait que
$$\lim_{x\to 0^+} x\ln x = 0$$
Par conséquent $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = -1$.
De plus, lorsque x tend vers $+\infty$ c'est encore le cas de $\ln x$ par conséquent :
$$\lim_{x\to+\infty} x\ln x = +\infty \Longrightarrow \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$$
3. De la question précédente on ne peut en déduire l'existence d'aucune asymptote.
4. Pour tout $x > 0$ on a :
$$f'(x) = \ln x + x \times \frac{1}{x} - 0 = \ln x + 1$$
De plus $\ln x + 1 \geq 0 \Longleftrightarrow \ln x \geq -1 \Longleftrightarrow x \geq e^{-1}$, d'où :

x	0		$\frac{1}{e}$		$+\infty$
Signe de $\ln x + 1$		$-$	0	$+$	
Variation de f	-1	$\searrow$	$-e^{-1} - 1$	$\nearrow$	$+\infty$

5. L'équation de la tangente Δ au point A d'abscisse 2 est :
$$y = f'(a)(x-a) + f(a) = f'(2)(x-2) + f(2) = (\ln 2 + 1)(x-2) + 2\ln 2 - 1 = (\ln 2 + 1)x - 3$$
6. Représenter graphiquement $\mathscr{C}_f$ et Δ dans le repère $(O; \vec{u}, \vec{v})$.



10
9
8
7
6
5
4
3
2
1
$\vec{j}$
O
$\vec{i}$
-1
1
2
3
4
5
6
7
-1
-2
-3

Proposition 2 :

Prérequis : on rappelle que : $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x} = +\infty$.

1. Démontrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$.

   On pourra effectuer un changement de variable en posant $X = e^x$

2. En déduire que pour tout entier naturel n non nul : $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{x^n} = 0$.

Preuve

1. Commencons par démontrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$ en utilisant le fait que

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty \Longleftrightarrow \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{e^x} = 0$$

   Posons $X = e^x \Longleftrightarrow \ln X = x$ on a alors

$$\lim_{X\to+\infty} \frac{\ln X}{X} = 0$$

2. On en déduit alors pour $n \geq 2$ que

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x^n} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x^{n-1}} \times \frac{\ln x}{x} = 0$$

   car $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x^{n-1}} = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$.

Exercice 1. (6 points)

On considère la fonction f définie par :

$$f(x) = \frac{\ln x}{x} - 1$$

On note $\mathscr{C}_f$ sa représentation graphique dans le repère $(O; \vec{u}, \vec{v})$.

1. f est définie pour $x > 0$ et $x \neq 0$ i.e $D_f =]0; +\infty[$.
2. On sait que

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$$

   Par conséquent

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = -1$$

   De plus lorsque x tend vers 0^+, $\ln x$ tend vers $-\infty$ et le quotient d'une quantité tendant vers $-\infty$ par une quantité tendant vers 0^+ tend vers $-\infty$, ainsi :

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = -\infty$$

3. Comme $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -1$, $\mathscr{C}_f$ admet une asymptote horizontale d'équation $y = -1$.
4. Pour tout $x > 0$, f est dérivable et

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{x} \times x - \ln x}{x^2} = \frac{1 - \ln x}{x^2}$$

   $f'(x)$ est du signe de $1 - \ln x$ donc :

$$1 - \ln x \geq 0 \Longleftrightarrow 1 \geq \ln x \Longleftrightarrow \ln x \leq 1 \Longleftrightarrow x \leq e$$

   d'où

x	0		e		$+\infty$
Signe de $f'(x)$		$+$	0	$-$	
Variation de f	$-\infty$	$\nearrow$	$\dfrac{1}{e}-1$	$\searrow$	-1

5. L'équation de la tangente Δ au point A d'abscisse 2 est :

$$y = f'(a)(x-a) + f(a) = f'(2)(x-2) + f(2) = \left(\frac{1-\ln 2}{4}\right)(x-2) + \frac{\ln 2}{2} - 1 = \left(\frac{1-\ln 2}{4}\right)x + \ln 2 - \frac{3}{2}$$

6. Représenter graphiquement $\mathscr{C}_f$ et Δ dans le repère $(O;\vec{u},\vec{v})$.