Correction de l'interrogation n°11

Proposition 1 :

Le plan complexe est rapporté à un repre orthonormal direct $(O; \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$.
Soient A, B et C trois points du plan d'affixes respectives $a,\ b,\ c$.
On suppose que A et B sont distincts, ainsi que A et C.
On rappelle que $\left(\overrightarrow{e_1},\ \overrightarrow{\mathrm{AB}}\right) = \arg(b-a) \quad [2\pi]$.
Montrer que $\left(\overrightarrow{\mathrm{AB}},\ \overrightarrow{\mathrm{AC}}\right) = \arg\left(\dfrac{c-a}{b-a}\right) \quad [2\pi]$.

Preuve

$$\begin{aligned}\left(\overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{AC}\right) &= \left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{e_1}\right) + \left(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{AC}\right) = -\left(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{AB}\right) + \left(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{AC}\right)\\ &= -\arg(b-a) + \arg(c-a) = \arg\left(\frac{c-a}{b-a}\right) \qquad [2\pi]\end{aligned}$$

Exercice 1. (6 points)

On munit le plan d'un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$. On considère les points A, B et C d'affixes respectives

$$z_A = 2+2i \qquad z_B = 5+2i \qquad z_C = 5+6i$$

On prendra soin de faire et compléter la figure tout au long de l'exercice.

1. cf. ci-dessous.
2. On a :

$$\begin{aligned}\frac{z_A - z_B}{z_C - z_B} &= \frac{2+2i-5-2i}{5+6i-5-2i}\\ \frac{z_A - z_B}{z_C - z_B} &= \frac{-3}{4i}\\ \frac{z_A - z_B}{z_C - z_B} &= \frac{-3i}{-4}\\ \frac{z_A - z_B}{z_C - z_B} &= \frac{3}{4}i\end{aligned}$$

De plus, :

$$(\overrightarrow{BC}; \overrightarrow{BA}) = arg\left(\frac{z_A - z_B}{z_C - z_B}\right)[2\pi] = arg\left(\frac{3}{4}i\right)[2\pi] = \frac{\pi}{2}[2\pi]$$

3. Comme $(\overrightarrow{BC}; \overrightarrow{BA}) = \dfrac{\pi}{2}[2\pi]$ alors le triangle ABC est rectangle en B
4. Soit r la rotation d'angle $-\dfrac{2\pi}{3}$ et de centre B.

   a. La forme complexe de r est :

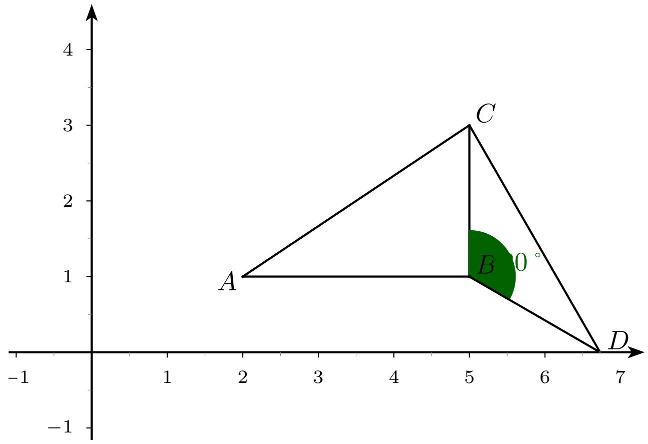
$$z' - z_B = e^{-i\frac{2\pi}{3}}(z - z_B) \Longleftrightarrow z' - 5 - 2i = e^{-i\frac{2\pi}{3}}(z-5-2i)$$

   Ainsi,

$$z_D - 5 - 2i = e^{-i\frac{2\pi}{3}}(5+6i-5-2i) \Longleftrightarrow z_D = \left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)4i + 5 + 2i \Longleftrightarrow z_D = -2i + 2\sqrt{3} + 5 + 2i = 2\sqrt{3} + 5$$

   b. Comme D est l'image de C par la rotation r alors $BC = BD$, par conséquent le triangle BCD est isocèle.

   c. L'angle $(\overrightarrow{BA}; \overrightarrow{BD}) = 2\pi - \dfrac{\pi}{2} - \dfrac{2\pi}{3}[2\pi] = \dfrac{12\pi - 3\pi - 4\pi}{6}[2\pi] = \dfrac{7\pi}{6}[2\pi]$



A
B
C
D
0 °

Proposition 2 :

Le plan complexe est rapporté à un repre orthonormal direct $(O;\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2})$.
Pour $M \neq \Omega$, on rappelle que le point M' est l'image du point M par la rotation r de centre Ω et d'angle de mesure θ si et seulement si :

$$\left\{\begin{array}{rcll} \Omega M' & = & \Omega M & (1) \\ \left(\overrightarrow{\Omega M}\ ;\ \overrightarrow{\Omega M'}\right) & = & \theta \text{ à } 2k\pi \text{ près } (k \in \mathbb{Z}) & (2) \end{array}\right.$$

1. Soient z, z' et ω les affixes respectives des points M, M' et Ω.
Traduire les relations (1) et (2) en termes de modules et d'arguments.

2. En déduire l'expression de z' en fonction de z, θ et ω

Preuve

1. La relation (1) se traduit par $|z'-\omega| = |z-\omega|$ ou encore $\dfrac{|z'-\omega|}{|z-\omega|} = 1$

La relation (2) se traduit par : $arg\left(\dfrac{z'-\omega}{z-\omega}\right) = \theta[2\pi]$

2. Le nombre complexe $\dfrac{z'-\omega}{z-\omega}$ a pour module 1 et pour argument θ, on peut donc écrire, en utilisant la forme exponentielle, que :

$$\frac{z'-\omega}{z-\omega} = e^{i\theta}$$

On en déduit alors que : $z'-\omega = e^{i\theta}(z-\omega) \Longleftrightarrow z' = e^{i\theta}(z-\omega)+\omega$

Exercice 1. (6 points)

On munit le plan d'un repère orthonormal $(O;\vec{i},\vec{j})$. On considère les points A, B et C d'affixes respectives

$$z_A = 2+2i \qquad z_B = 5+2i \qquad z_C = 5+6i$$

On prendra soin de faire et compléter la figure tout au long de l'exercice.

1. cf. ci-dessous.

2. On a :

$$\begin{aligned} \frac{z_A-z_B}{z_C-z_B} &= \frac{2+2i-5-2i}{5+6i-5-2i} \\ \frac{z_A-z_B}{z_C-z_B} &= \frac{-3}{4i} \\ \frac{z_A-z_B}{z_C-z_B} &= \frac{-3i}{-4} \\ \frac{z_A-z_B}{z_C-z_B} &= \frac{3}{4}i \end{aligned}$$

De plus, :

$$(\overrightarrow{BC};\overrightarrow{BA}) = arg\left(\frac{z_A-z_B}{z_C-z_B}\right)[2\pi] = arg\left(\frac{3}{4}i\right)[2\pi] = \frac{\pi}{2}[2\pi]$$

3. Comme $(\overrightarrow{BC};\overrightarrow{BA}) = \dfrac{\pi}{2}[2\pi]$ alors le triangle ABC est rectangle en B.

4. Soit h la transformation du plan qui a tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' telle que :

$$z' = \frac{4}{3}z - \frac{5}{3} - \frac{2}{3}i$$

a. L'affixe de E, z_E image de A par h est :

$$z_E = \frac{4}{3}(2+2i) - \frac{5}{3} - \frac{2}{3}i = \frac{8}{3} + \frac{8}{3}i - \frac{5}{3} - \frac{2}{3}i = 1+2i$$

b. On recherche le point fixe de h :

$$h(z)=z \Longleftrightarrow z=\frac{4}{3}z-\frac{5}{3}-\frac{2}{3}i \Longleftrightarrow -\frac{1}{3}z=-\frac{5}{3}-\frac{2}{3}i \Longleftrightarrow z=5+2i=z_B$$

L'unique point fixe de cette transformation est B, transformation de la forme $z'=az+b$ avec $a=\dfrac{4}{3}\in\mathbb{R}$, par conséquent h est une homothétie de centre B et de rapport $\dfrac{4}{3}$.

c. Comme E est l'image de A par l'homothétie h les points E, A et B sont alignés, par conséquent le triangle EBC est au moins rectangle en B. De plus $EB=\mid z_B-z_E\mid=4=CB$, ainsi le triangle EBC est aussi isocèle.