Correction de l'interrogation n°10

Exercice 1. R.O.C (4 points)

On suppose connu le résultat suivant :

La fonction $x \mapsto \mathrm{e}^x$ est l'unique fonction φ dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que $\varphi' = \varphi$, et $\varphi(0) = 1$.

Soit a un réel donné.

1. Montrons que la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \mathrm{e}^{ax}$ est solution de l'équation $y' = ay$.
   On a
   $$f'(x) = ae^{ax} = af(x)$$
   Par conséquent f est solution de l'équation $y' = ay$.
2. Soit g une solution de l'équation $y' = ay$. Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = g(x)\mathrm{e}^{-ax}$.
   On a pour tout $x \in \mathbb{R}$,
   $$h'(x) = g'(x)e^{-ax} - ag(x)e^{-ax} = e^{-ax}(g'(x) - ag(x)) = e^{-ax} \times 0 = 0$$
   Par conséquent, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $h(x) = K$ avec $K \in \mathbb{R}$.
3. D'après la question précédente si g est une solution de $y' = ay$ alors, pour tout $x \in \mathbb{R}$
   $$g(x)e^{-ax} = K \Longleftrightarrow g(x) = Ke^{ax}$$

Exercice 2. (6 points)

On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par :
$$g(x) = e^{-x^2}$$

1. Pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a
   $$g(-x) = e^{-(-x)^2} = e^{-x^2} = g(x)$$
   ce qui prouve que g est paire.
2. On a
   $$g'(x) = -2xe^{-x^2}$$
   qui est du signe de $-2x$ puisque $e^{-x^2} > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Ainsi :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	
g		$\nearrow$	1	$\searrow$	

3. On vient de le faire.
4. On a $\lim\limits_{x \to +\infty} -x^2 = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$, par conséquent :
   $$\lim_{x \to +\infty} e^{-x^2} = 0$$
   De même $\lim\limits_{x \to -\infty} -x^2 = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$, par conséquent :
   $$\lim_{x \to -\infty} e^{-x^2} = 0$$
5. Comme la dérivée s'annule en changeant de signe 0, la fonction g admet un extremum, un maximum en l'occurence qui est 1.
6. Pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a $g''(x) = -2e^{-x^2} + 4x^2e^{-x^2}$, puis
   $$g''(x) = 0 \Longleftrightarrow -2e^{-x^2} + 4x^2e^{-x^2} = 0 \Longleftrightarrow -2 + 4x^2 = 0 \Longleftrightarrow x^2 = \frac{1}{2} \Longleftrightarrow x = \pm\sqrt{\frac{1}{2}} = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$$

Correction de l'interrogation n°10

Exercice 1. R.O.C (4 points)

L'objet de cette question est de démontrer que $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\mathrm{e}^x}{x} = +\infty$.

1. On considère la fonction g définie sur $[0\ ;\ +\infty[$ par $g(x) = \mathrm{e}^x - \dfrac{x^2}{2}$.
   Pour tout x de $]0\ ;\ +\infty[$ on a :
   $$g'(x) = e^x - \frac{2x}{2} = e^x - x \geq 0$$
   Ainsi la fonction g est strictement croissante et donc pour tout x de $]0\ ;\ +\infty[$:
   $$g(x) \geq g(0) = 1 \geq 0 \Longrightarrow e^x \geq \frac{x^2}{2} \Longrightarrow \frac{e^x}{x} \geq \frac{x}{2}$$
2. Comme $\dfrac{x}{2}$ tend vers $+\infty$ en $+\infty$ on en déduit immédiatement par comparaison que :
   $$\lim_{x \to +\infty} \frac{\mathrm{e}^x}{x} = +\infty$$

Exercice 2. (6 points)

1. On note
   $$(E_1) \begin{cases} z(0) = 100 \\ z' = -0,5z + 0,05 \end{cases}$$
   (a) $z' = -0,5z + 0,05$ admet une infinité de solutions de la forme
   $$z(x) = Ke^{-0,5x} - \frac{0,05}{-0,5} = Ke^{-0,5x} + \frac{1}{10}$$
   (b) Comme de plus $z(0) = 100 = K + \dfrac{1}{10} \Longleftrightarrow K = 100 - \dfrac{1}{10} = \dfrac{999}{10} = 99,9$
2. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par
   $$f(x) = 99,9e^{-0,5x} + \frac{1}{10}$$
   (a) Pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a $f'(x) = -99,9 \times 0,5e^{-0,5x} = -49,95e^{-0,5x} < 0$, par conséquent la fonction f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$

   (b) On a $\lim\limits_{x \to +\infty} -0,5x = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$, par conséquent :
   $$\lim_{x \to +\infty} e^{-0,5x} + \frac{1}{10} = \frac{1}{10}$$
   De même $\lim\limits_{x \to -\infty} -0,5x = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$, par conséquent :
   $$\lim_{x \to -\infty} e^{-0,05x} + \frac{1}{10} = +\infty$$
   (c) Ainsi la droite d'équation $y = \dfrac{1}{10}$ est asymptote horizontale à la courbe en $+\infty$.

   (d) L'équation de la tangente au point d'abscisse 0 est
   $$y = f'(a)(x-a) + f(a) = f'(0)x + f(0) = -49,95x + 99,9 + \frac{1}{10} = -49,95x + 100$$