Nom : .... **Prénom :** .... Classe :.....

Interrogation n°7

On prendra soin de coller le sujet sur la copie. La note tiendra compte de la qualité de la rédaction et de l'application.

Exercice 1. ***R.O.C, Polynésie-juin 2005*** (4 points)

Prérequis : Théorème des valeurs intermédiaires « Soit I un intervalle, a et b deux réels de I tels que $a < b$.
Soit f une fonction continue sur I, soit k un réel compris entre $f(a)$ et $f(b)$, alors :
il existe au moins un réel c dans $[a;b]$ tel que $f(c) = k$ ».
Démontrer le théorème suivant :

Théorème 1 : ***théorème de la bijection***
Soit f une fonction continue et strictememnt monotone sur un intervalle I. Soit a et b deux réels de I tels que $a < b$.
Soit k un réel compris entre $f(a)$ et $f(b)$ alors :
il existe un unique c dans $[a;b]$ tel que $f(c) = k$

Exercice 2. (6 points)

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = x^3 - 30x^2 + 112$$

On souhaite étudier le signe de la fonction f

1. La fonction f est-elle continue sur $\mathbb{R}$
2. Etudier la limite de f en $+\infty$ et en $-\infty$.
3. Calculer $f'(x)$ et étudier son signe. Dresser le tableau de variation de f.
4. Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet trois solutions.
5. Avec la calculatrice, donner l'arrondi au dixième ou la valeur exacte de chaque solution.
6. En déduire le signe de f.

Nom : .... **Prénom :** .... Classe :.....

Interrogation n°7

On prendra soin de coller le sujet sur la copie. La note tiendra compte de la qualité de la rédaction et de l'application.

Exercice 1. R.O.C (4 points)

On considère la fonction partie entière E qui a tout x réel associe le plus grand entier inférieur ou égal à x.
Montrer que la fonction partie entière est discontinue pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 2. (6 points)

1. (a) Démontrer que l'équation $x^3 + 3x = 5$ admet une solution et une seule dans $\mathbb{R}$.
   (b) Donner une valeur approchée à 10^{-2} près de cette solution.
2. (a) Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

   $$f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 \text{ si } x < 0 \\ x - 1 \text{ si } x \geq 0 \end{cases}$$

   f est-elle continue sur $\mathbb{R}$.

   (b) Quelle valeur de a faut-il choisir pour que la fonction définie par :

   $$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{x+1} - 1}{x} \text{ si } x \in [-1;0[\cup]0;+\infty[\\ a \text{ si } x = 0 \end{cases}$$

   soit continue en 0.